

**Области Неймана первой и второй собственной функции****Научный руководитель – Пенской Алексей Викторович***Кислицын Алексей Дмитриевич**Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
 Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва,  
 Россия

*E-mail: aleksk2001@yandex.ru*

Важным разделом спектральной геометрии является нодальная геометрия (см. например [1, глава 4]). Она изучает свойства разбиения области  $\Omega$  или многообразия  $M$  на нодальные области, то есть на связные компоненты  $\Omega \setminus u^{-1}(0)$  или  $M \setminus u^{-1}(0)$ , где функция  $u$  является собственной функцией оператора Лапласа. Недавно в статьях [2, 3] был предложен аналог нодальных областей: области Неймана. Дадим определение областей Неймана в случае, когда  $u$  является функцией Морса на замкнутой двумерной поверхности. Обозначим через  $\mathcal{S}$  множество седловых точек функции  $u$ , а через  $W^s(r)$ ,  $W^u(r)$  стабильное и нестабильное множество критической точки  $r$  соответственно.

**Определение 1.** Линии Неймана функции Морса  $u$  это

$$\mathcal{N}(u) = \bigcup_{r \in \mathcal{S}} (W^s(r) \cup W^u(r)),$$

**Определение 2.** Области Неймана это связные компоненты  $M \setminus \mathcal{N}(u)$

Хорошо известно, что первая собственная функция задачи Дирихле имеет ровно одну нодальную область, а вторая ровно две. В данной работе исследуется справедливость подобных утверждений для областей Неймана. Основными полученными результатами являются следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega$  выпуклая область с аналитической границей положительной кривизны, тогда первая собственная функция  $u$  задачи Дирихле на  $\Omega$  имеет ровно одну область Неймана.

Причем условия выпуклости и аналитичности границы являются существенными. Построены примеры, которые показывают, что их нельзя убрать.

**Теорема 2.** Пусть  $\Omega$  выпуклая область с аналитической границей, тогда вторая собственная функция задачи Дирихле на  $\Omega$  имеет хотя бы 3 области Неймана: две граничные и одну внутреннюю.

**Благодарности.** Данная работа была поддержана стипендией Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (№ 24-8-2-19-1). Выражаю особую благодарность своему научному руководителю — Пенскому Алексею Викторовичу.

**Источники и литература**

- 1) Michael Levitin, Dan Mangoubi, and Iosif Polterovich. Topics in spectral geometry, volume 237 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, [2023] ©2023.

- 2) Ram Band and David Fajman. Topological properties of Neumann domains. *Ann. Henri Poincaré*, 17(9):2379–2407, 2016.
- 3) T. V. Anoop, Vladimir Bobkov, and Mrityunjay Ghosh. Neumann domains of planar analytic eigenfunctions, 2024. arXiv preprint arXiv:2410.07811.