

Топологическое исследование слоения Лиувилля плоского эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Туниянц Доминика Арамовна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и
приложений, Москва, Россия
E-mail: 2001dat@inbox.ru

Одним из обобщений плоского математического бильярда, в котором частица движется в замкнутой ограниченной области без воздействия на нее внешних сил, является плоский бильярд с потенциалом, в частности, бильярд с потенциалом полиномиального вида, ограниченный квадратами из семейства софокусных квадратов, задаваемого уравнением:

$$\frac{x^2}{\lambda + a} + \frac{y^2}{\lambda + b} = 1 \quad (1)$$

Рассмотрим бильярд в связной области, ограниченной квадратами из семейства (1) (эллипсами с параметрами $\Lambda_1 \in [-b, 0)$, $\Lambda_2 = 0$, гиперболами с параметрами $\Lambda_3 \in (-a, -b]$, $\Lambda_4 \in [-a, -b)$, $\Lambda_4 < \Lambda_3$), с полиномиальным потенциалом порядка $2l$, имеющий вид $P_{2l} = \sum_{i=0}^{2l} a_{2i, 2(l-i)} x^{2i} y^{2(l-i)}$. Такой бильярд является вполне интегрируемой динамической системой с первыми интегралами H — гамильтонианом — и F , согласно теореме Козлова [1]. Лиувиллевы слоения на трёхмерных поверхностях описанной динамической системы удобно изучать при помощи инвариантов Фоменко-Цишанга, которые можно вычислять, явным образом исследуя перестройки областей возможного движения (ОВД) частицы при изменении значения интеграла F с фиксированным значением интеграла $H = h$. Однако перебор случаев различных перестроек ОВД становится трудоёмким при повышении степени потенциала, поэтому в данной работе предлагается алгоритм построения грубого инварианта Фоменко-Цишанга, исходя из свойств многочлена P_{2l} .

В эллиптических координатах уравнения движения такой системы могут быть записаны в следующем виде, где a, b — параметры граничного эллипса из семейства софокусных квадратов $(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda)$: $\dot{\lambda}_i = \pm C \sqrt{V(\lambda_i)}$, $i = 1, 2$, где $V(z) = \left(\sum_{i=0}^{l-1} c_i z^{l+1-i} + hz + f \right) (a+z)(b+z)$. Введём обозначение $W(z) = \sum_{i=0}^{l-1} c_i z^{l+1-i} + hz + f$.

В ходе данной работы были полностью описаны вид и количество атомов, возникающих при бифуркациях бильярда с потенциалом вида $P_{2l} = \sum_{i=0}^{2l} a_{2i, 2(l-i)} x^{2i} y^{2(l-i)}$ (любой чётной степени), с использованием только свойств многочлена $W(x)$, параметров границы бильярда и без явного исследования перестроек ОВД. Теорема ниже описывает бифуркации, возникающие при перестройке ОВД через фокусы граничного эллипса.

Теорема 1. Пусть $\Lambda_3 = \Lambda_1 = -b$ и многочлен $W(z)$ имеет k корней на интервале $(\Lambda_4, -b)$, p корней на интервале $(-b, 0)$, а также имеет корень $z = -b$, причем $W'(-b) > 0$. Тогда перестройка ОВД, получающаяся при уменьшении значения интеграла F от $f + \varepsilon$ до $f - \varepsilon$, является перестройкой через фокусы граничного эллипса и описывается следующим образом:

1) Если k — чётное ($k > 0$), то перестройка имеет вид, как на рис.1, где $\alpha = 2\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1$, $\beta =$

$2\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$, $\gamma = 2$;

2) Если k — нечётное ($k > 1$), то перестройка имеет вид, как на рис.1, где $\varphi = 2(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1) - 1$, $\beta = 2\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$, $\gamma = 2$;

3) Если $k = 1$, то перестройка имеет вид, как на рис.1, где $\varrho = 1$, $\psi = 2\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$.

Источники и литература

- 1) Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде., Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.
- 2) Ведюшкина В.В., Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем, Математический сборник, 2018. т. 209, №12, 17–56
- 3) V.I.Dragovich, Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse, J. Appl. Maths Mechs, Vol. 62, No1, pp. 159-162, 1998
- 4) Пустовойтов С.Е., Топологический анализ эллиптического биллиарда в потенциальном поле четвертого порядка, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2021, №5, 8–19

Иллюстрации

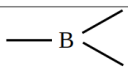
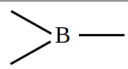
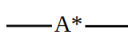
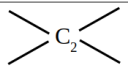
Тип перестройки	Количество		
	к четное	к нечетное ($k > 1$)	к = 1
	α	φ	ϱ
	β	β	-
	γ	γ	-
	-	-	ψ

Рис. : Виды и число атомов при перестройке ОВД через фокусы