Секция «Геометрия и топология»

Нижние оценки для первого собственного числа минимально вложенной гиперповерхности в римановом многообразии

Научный руководитель – Пенской Алексей Викторович

Сурков Егор Михайлович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: egor.surkov@math.msu.ru

1. Нижние оценки для первого собственного числа минимально вложенной гиперповерхности в римановом многообразии

Пусть M — ориентируемое замкнутое многообразие размерности $n+1$ с римановой метрикой $\overline{g}$, а Σ — минимально вложенная ориентированная замкнутая гиперповерхность $\psi : \Sigma \hookrightarrow M$. Будем рассматривать на Σ индуцированную вложением метрику $g = \psi^*\overline{g}$, тогда на Σ определен оператор Лапласа-Бельтрами

$$\Delta_g(f) = -\frac{1}{\sqrt{det(g)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right). \tag{1}$$

Обозначим первое ненулевое собственное число оператора Δ_g через $\lambda_1(\Sigma, g)$.

Оценки на первое собственное число оператора Лапласа-Бельтрами для метрик, индуцированных минимальным вложением в многообразие с положительной кривизной Риччи, впервые были получены в работе Чоя и Вана [2]. Недавно, в случае сферы, оценки полученные Чоем и Ваном были улучшены в работе [3] с помощью методов теории трубчатых окрестностей [4]. Я расскажу об оценке первого собственного числа для многообразий с положительной секционной кривизной [1], она улучшает оценку приведенную в работе [2]. Пусть M удовлетворяет следующему условию

$$c = \inf_{\substack{p\in M\\ \sigma\in T_pM}} {}_M(\sigma) > 0, \text{ где } \sigma \text{ двумерная плоскость в } T_pM. \tag{2}$$

Введем константу

$$b = \sup_{\substack{p\in M\\ \sigma\in T_pM}} {}_M(\sigma). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть M замкнутое ориентируемое риманово многообразие размерности $n+1$, удовлетворяющее условию (2), а Σ минимально вложенная в M замкнутая ориентируемая гиперповерхность. Тогда существуют такие константы*

$$\varepsilon \in \left(0\,,\,\frac{\Lambda}{2}\right), \qquad\qquad \beta > 0, \tag{4}$$

что для констант

$$\widetilde{\varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{b} - \sqrt{c}\frac{\varepsilon}{\Lambda}}\right)\left(1 + \frac{bn}{\Lambda^2}\right)\sqrt{c}, \qquad \delta = \frac{c\,n}{\sqrt{b}} \arctan\left(\frac{\varepsilon}{n\sqrt{c}}\right), \tag{5}$$

выполняется следующее

$$\gamma = \sqrt{2nc} - \widetilde{\varepsilon} - \beta > 0, \tag{6}$$

а константы

$$a_n = \frac{(cn-1)\delta^3\gamma}{64}, \qquad b_n = \frac{(cn-1)\delta^3}{32\beta}, \tag{7}$$

таковы, что верна следующая оценка

$$\lambda_1(\Sigma) \geqslant \frac{cn}{2} + \frac{a_n}{\Lambda^6 + b_n}, \tag{8}$$

где $\Lambda = \sup\limits_{\Sigma} ||B||$. *К тому же, мы можем выбрать* β *и* ε *так, чтобы выполнялось*

$$a_n \geqslant \frac{3(cn-1)(c\cdot n)^{7/2}}{b^{3/2}\,6400} \arctan^3\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{c}\,n}\right), \tag{9}$$

$$b_n \leqslant \frac{5(cn-1)(c\cdot n)^{5/2}}{b^{3/2}\,8} \arctan^3\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{c}\,n}\right), \tag{10}$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{2(2\sqrt{b} - \sqrt{c})\sqrt{n}}{3\sqrt{b\frac{bc+1}{b}}}. \tag{11}$$

Выражаю особую благодарность моему научному руководителю Пенскому Алексею Викторовичу.

Данная работа была поддержана стипендией от Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (№ 24-8-2-10-1).

Источники и литература

1) Surkov E. (2024). Lower bound for the first eigenvalue of a minimally embedded hypersurface in a Riemannian manifold. *arXiv preprint*. arXiv:2409.16419.URL: https://arxiv.org/abs/2409.16419
2) Choi H.I., Wang A.N. (1983). A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces. *Journal of Differential Geometry*, 18(3), 559–562. URL: http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214437788
3) Duncan J.A.J., Sire Y., Spruck J. (2024). An Improved Eigenvalue Estimate for Embedded Minimal Hypersurfaces in the Sphere. *International Mathematics Research Notices*, 18, 12556–12567. DOI: 10.1093/imrn/rnae154
4) Gray A. (2004). *Tubes* (2nd ed.). Birkhäuser Verlag, Basel. xiv + 280 pp. *Progress in Mathematics* (Vol. 221). DOI: 10.1007/978-3-0348-7966-8