

**Классификация коммутирующих ОДО при помощи нормальных форм****Научный руководитель – Жеглов Александр Борисович*****Пичугин Павел Романович****Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
 Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и  
 приложений, Москва, Россия

*E-mail: pavel.pichugin@math.msu.ru*

Возьмем  $\mathbb{K}[[x]]$  - кольцо формальных степенных рядов над полем  $\mathbb{K}$  характеристики 0  
 и рассмотрим на нем стандартное дискретное нормирование  $v$  на  $\mathbb{K}[[x]]$ .

Определим пространство

$$\mathcal{M}_1 := \mathbb{K}[[x]][[\partial]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \partial^k \mid a_k \in \widehat{\mathcal{R}} \right\}$$

и введем на  $\mathcal{M}_1$  функцию порядка:

$$\text{ord} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \partial^k \right) = \sup \{ k - v(a_k) \mid k = 0, 1, 2, \dots \}.$$

Определим новое кольцо ("псевдодифференциальных" операторов), впервые изучавшееся  
 в [3]:

$$\widehat{D}_1^{\text{sym}} = \{ P \in \mathcal{M}_1 \mid \text{ord}(P) < \infty \}.$$

В статье А.Б. Жеглова [1] были исследованы основные свойства и доказаны основные  
 теоремы теории Шура для кольца  $\widehat{D}_1^{\text{sym}}$ . В частности была доказана теорема:

**Теорема 1.** Пусть  $Q \in \widehat{D}_1^{\text{sym}}$  регулярный оператор порядка  $\text{ord}(Q) = q \geq 0$ . Тогда  
 существует обратимый оператор  $S \in \widehat{D}_1^{\text{sym}}$  порядка  $\text{ord}(S) = 0$ , такой что  $Q = S^{-1} \partial^q S$ .

Оператор  $S$  из теоремы будем называть оператором Шура.

**Определение 1.** Пусть дана пара монических коммутирующих дифференциальных опе-  
 раторов  $P, Q \in \mathbb{K}[[x]][[\partial]]$ ,  $\text{ord}(P) = p$ ,  $\text{ord}(Q) = q$ .

К ним можно применить теорему Шура:

$$\partial^q = SQS^{-1}, \quad P' = SPS^{-1}.$$

Оператор  $P'$  будем называть нормальной формой  $P$  относительно  $Q$ .

Известно, что  $P'$  принадлежит централизатору  $C(\partial^q)$ , который был описан в [2], а в [1]  
 было доказано, что он изоморфен матричному кольцу  $M_q(K[D^q])$ .

Хорошо известна классификация И. М. Кричевера [4], [5] коммутативных колец обык-  
 новенных дифференциальных операторов в терминах геометрических спектральных дан-  
 ных:

**Теорема 2.** Имеется взаимно-однозначное соответствие

$$[B \text{ ранга } r] / \leftrightarrow [(C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi) \text{ ранга } r] / \simeq,$$

где  $(C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$  геометрические данные ранга  $r$ , т.е.

$C$  - неприводимая гладкая проективная кривая рода  $g$

$P \in C$  - регулярная точка

$\mathcal{F}$  - расслоение или пучок без кручения ранга  $r$

$\pi = k^{-1}$  - локальный параметр в окрестности точки  $P$

$\phi$  - некоторые данные тривиализации пучка в точке  $P$ .

Я расскажу об альтернативной эффективной классификации в терминах нормальных форм, а именно:

**Теорема 3.** Существует взаимно-однозначное соответствие между кольцами коммутирующих операторов  $\mathbb{K}[P, Q]$  ранга  $r$ , с условием  $r = \text{НОД}(p, q)$ , где  $p = \text{ord}(P)$ ,  $q = \text{ord}(Q)$  и где  $P$  и  $Q$  удовлетворяют уравнению Burchall-Chaundy  $F(P, Q) = 0$ , т.е. уравнению с неприводимым многочленом  $F(X, Y)$  вида

$$F(X, Y) = (\alpha X^q + Y^p)^r + \sum_{i, j \geq 1 | pi + qj < rpq} a_{i, j} X^i Y^j$$

и тройками  $(P', \partial^q, \tilde{S})$ , где  $P' \in C(\partial^q) \simeq M_q(K[D^q])$  - монический элемент централизатора  $\partial^q$  порядка  $p$ , удовлетворяющий уравнению  $F(P', \partial^q) = 0$ , а  $\tilde{S} \in M_r(K[[D^{-r}]]) \subset K^{\oplus r}((D^{-1}))$  - обратимый элемент порядка 0.

Автор благодарен А.Б. Жеглову за постановку задачи и ценные обсуждения.

### Источники и литература

- 1) J. Guo, A. Zheglov, *Normal forms for ordinary differential operators, I*, preprint, <https://arxiv.org/abs/2406.14414>.
- 2) Жеглов А. Б. *Теория Шура-Сато для квазиэллиптических колец* // Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН. — 2023. — Т. 320. — С. 128-176.
- 3) I. Burban, A. Zheglov, Cohen-macaulay modules over the algebra of planar quasi-invariants and Calogero-Moser systems, *Proceedings of LMS*, 2020.- Vol. 121, no. 4.- P. 1033-1082. arX iv:1703.01762.
- 4) I. Krichever, Methods of algebraic geometry in the theory of nonlinear equations, *Uspehi Mat. Nauk* 32 (1977), no. 6 (198), 183208, 287.
- 5) I. Krichever, Commutative rings of ordinary linear differential operators, *Func. Anal. Appl.* 12 no. 3 (1978), 175185. 60.