Секция «Геометрия и топология»

Функционал Мамфорда-Эйлера и контуризация изображений

Научный руководитель – Алексеевский Дмитрий Владимирович

Каренин Николай Евгеньевич
Студент (магистр)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Факультет математики, Москва, Россия
E-mail: karenin.nik@mail.ru

Настоящий доклад посвящен проблеме контуризации в обработке изображений. Примарная зрительная кора человеческого мозга производит первичную обработку зрительной информации об окружающем мире. В раннем зрении происходит обнаружение очертаний, контуров объектов, свет от которых попадает на сетчатку. Математически, изображение описывается функцией $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, где Ω — сетчатка, которая при локальном рассмотрении отождествляется с некоторой открытой областью в $\mathbb{R}^2$; однако глобально, в связи с тем, что сетчатка занимает примерно 2/3 поверхности глаза, область Ω можно отождествить с двумерной сферой S^2. Если человек смотрит на объект, находящийся на расстоянии приблизительно 6-7 метров, то можно считать, что направления взгляда одного и другого глаза параллельны. Таким образом, для контуризации можно ограничиться рассмотрением монохромного и монокулярного зрения. Также для простоты будем считать, что глаз неподвижен, а окружение статично.

Одним из пионеров в области разработки математических методов обработки изображений является Д. Мамфорд [7]. Он рассматривал, в первую очередь, компьютерное зрение (например, задача сегментации изображений [6]). Однако, предложенные им идеи и методы после некоторых обобщений могут быть распространены и на зрение человека. Далее приведем фрагменты теории Мамфорда, касающиеся проблемы контуризации, необходимые для формулировки основного результата.

Во-первых, в рамках этой теории рассматривается плоское изображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, что соответствует, например, объективу фотоаппарата или изображению на экране компьютера. Во-вторых, функция f предполагается гладкой: хотя в реальности как в компьютерном, так и биологическом зрении все изображения дискретны, данное предположение существенно упрощает теоретические рассмотрения, после которых все рассматриваемые объекты могут быть дискретизированы. Контуром называется линия уровня функции $f^{-1}(c)$, который, если $c \in \mathbb{R}$ – регулярное значение, также можно представить локально как образ гладкой параметризованной кривой $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \Omega$. Задача контуризации заключается в нахождении кривой γ, которая наиболее точно (например, в смысле среднеквадратичного отклонения) приблизит истинное положение контура. Мамфорд предлагает свести данную задачу к оптимизации функционала

$$E(\gamma) = \int_\gamma \left(a\kappa(s)^2 + b\right) ds, \tag{1}$$

где γ — кривая на Ω, параметризованная натуральным параметром s, $\kappa(s)$ — кривизна кривой γ, a и b — положительные параметры.

Кривые γ, минимизирующие функционал (1), исследовались Л. Эйлером [4] и назывались им эластиками. Поскольку Мамфорд ввел его в рассмотрение при решении задач зрения, мы будем называть функционал (1) функционалом Мамфорда-Эйлера. Таким образом, контуризация сводится к решению вариационной задачи

$$E(\gamma) \to \min. \tag{2}$$

Функционал Мамфорда-Эйлера тесно связан с теорией случайных процессов и статистической физикой. Эта связь проясняется в следующей вероятностной интерпретации функционала (1), данной также Мамфордом. Пусть $\theta(s)$ — угол между касательной к кривой γ в точке $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ и осью Ox. Предположим, что $\{\theta(s) \mid s \in [\alpha, \beta]\}$ представляет собой винеровский стохастический процесс. Тогда на пространстве непрерывных кривых на Ω возникает распределение Гиббса и вероятность $\Pr$ каждой кривой γ выражается следующей формулой

$$\Pr(\gamma) = \frac{1}{Z}\exp(-E(\gamma)), \tag{3}$$

где Z — нормировочный множитель.

Такая термодинамическая интерпретация функционала Мамфорда-Эйлера позволяет свести процесс нахождения эластик к применению принципа максимального правдоподобия на пространстве кривых, а также использованию так называемых диффузионных методов [2, 3].

Другая интерпретация решения оптимизационной задачи (2) возникает при рассмотрении движения без скольжения заднего колеса велосипеда [8, 9]. Данная задача сводится к нахождению субримановых геодезических на группе $SE(2)$ собственных движений пространства $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой, поскольку функционал эластики на $\mathbb{R}^2$ совпадает с кинетической энергией, получающейся из субримановой метрики многообразия $SE(2)$.

Перейдем к формулировке основного результата. Рассмотрим теперь контуризацию на сфере. Пусть $\chi\colon S^3 \to S^2$ — расслоение Хопфа, $\mathcal{H} \subset TS^3$ — неголономное распределение 2-плоскостей, ортогональное к слоям χ и $g^{\mathcal{H}}$ — субриманова метрика на $\mathcal{H}$. Рассмотрим также стандартную риманову метрику g_{S^2} на сфере S^2 и соответствующую ей связность Леви-Чивиты ∇. Для кривых $\gamma\colon I \to S^2$ на двумерной сфере распространим определение функционала Мамфорда-Эйлера:

$$\Phi(\gamma) = \int_{\gamma} (a|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma|^2 + b|\dot\gamma|^2)dt, \tag{4}$$

где вместо кривизны кривой на плоскости используется геодезическая кривизна $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ кривой.

Также, пусть $g_{S^2}^{-1}$ — риманова метрика на кокасательном расслоении T^*S^2, λ — форма Лиувилля на кокасательном расслоении T^*S^3 и $F_X^*|_p$ — линейное отображение, двойственное к отображению $F_X|_p\colon T_pS^2 \to \mathfrak{so}(2), F_X(Y) = \frac{1}{2}[\widetilde{X}^{\mathcal{H}}, \widetilde{Y}^{\mathcal{H}}]^{\mathcal{V}}$, определенного в каждой точке $p \in S^2$ и для каждого векторного поля $X \in \Gamma(TS^2)$; $(\widetilde{Z})^{\mathcal{H}}$ — горизонтальное поднятие векторного поля $Z \in \Gamma(TS^2)$, а $W^{\mathcal{V}}$ — проекция векторного поля $W \in \Gamma(TS^3) = \Gamma(\mathcal{H} \oplus \mathcal{V})$ на вертикальное распределение $\mathcal{V}$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть γ — кривая на сфере, минимизирующая функционал (4). Тогда горизонтальное поднятие кривой γ на S^3 удовлетворяет уравнению нормальных субримановых геодезических или, что равносильно, кривая γ удовлетворяет уравнению геодезических с правой частью

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = g_{S^2}^{-1}F_{\dot\gamma}^*\lambda.$$

Доказательство теоремы опирается [5] на связь между гамильтонианом субриманова многообразия S^3 и уравнением Эйлера-Лагранжа для функционала (4) и на теорему 25 из [1], выражающую субримановы геодезические на тотальном пространстве расслоения и римановы геодезические на базе.

Полученный результат распространяет на сферу S^2 подход Д. Мамфорда к контуризации и может служить подспорьем для дальнейшего рассмотрения геометрии сферы при моделировании зрения человека.

Источники и литература

1) Alekseevsky D. Shortest and straightest geodesics in sub-Riemannian geometry // Journal of Geometry and Physics. 2020. V. 155: 103713. DOI:10.1016/j.geomphys.2020.103713
2) Ballerin F., Grong E. Geometry of the Visual Cortex With Applications to Image Inpainting and Enhancement. 2024. Preprint available at Research Square. https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-4349147/v1
3) Boscain U. [et al.]. Hypoelliptic Diffusion and Human Vision: A Semidiscrete New Twist. // SIAM J. Imaging Sci. 2013. V. 7(2). P. 669-695. DOI:10.1137/130924731
4) Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti. 1744.
5) Montgomery R. A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications. — American Mathematical Soc., 2002.
6) Mumford D. Boundary Detection by Minimizing Functionals I. // Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 1985. P. 22-26.
7) Mumford D. Elastica and Computer Vision. // Algebraic Geometry and its Applications. 1994. P. 491-506. DOI: 10.1007/978-1-4612-2628-4_31
8) Ardentov A. [et al.]. Bicycle paths, elasticae and sub-Riemannian geometry. arXiv preprint. [2021]. arXiv: 2010.04201v2
9) Fioresi R. [et al.]. A new perspective on border completion in visual cortex as bicycle rear wheel geodesics paths via sub-Riemannian Hamiltonian formalism. arXiv preprint. [2023]. arXiv: 2304.00084