

Операции функциональной и автоматной суперпозиции конечных автоматов

Научный руководитель – Волков Николай Юрьевич

Крюков Сергей Алексеевич

Студент (бакалавр)

Филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в

г.Ташкенте, Ташкент, Узбекистан

E-mail: serzh.kryukov.05@inbox.ru

Аннотация

В данной работе рассматриваются операции функциональной и автоматной суперпозиции над автоматами с финальными состояниями. Показано, что значения этих операций совпадают тогда и только тогда, когда верно одно из условий: либо первого автомата финальное состояние - недостижимо, а второй автомат - тождественный, либо у обоих автоматов начальные состояния являются финальными.

Основные определения

Будем использовать следующие определения из классической теории автоматов [1]: ограниченно-детерминированные функции (сокращенно о.д. функции); конечный абстрактный инициальный автомат; диаграмма Мура автомата; автоматная функция; достижимое состояние; эквивалентность автоматов (эквивалентность автоматов обозначается как $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$); конкатенация. Обозначим λ пустое слово. Расширим область определения операции конкатенации на пустое слово λ следующим образом: $\forall a \in A^* : \lambda a = a\lambda = a$. Расширенный алфавит $A \cup \{\lambda\}$ обозначим как A^+ .

Пусть A и B конечные непустые алфавиты.

Определение 1. Автоматом с финальными состояниями (сокращенно автоматом) называется набор $(A^+, B^+, Q, Q^f, \phi, \psi, q^0)$, где A – входной алфавит, B – выходной алфавит, Q – алфавит состояний, $Q^f \subseteq Q$ – алфавит финальных состояний, ϕ и ψ функции переходов и выходов, q^0 – начальное состояние. $\phi : Q \times A \rightarrow Q$ – функция переходов, по текущему состоянию и входному символу определяет следующее состояние, $\psi : Q \times A \rightarrow B$ – функция выходов, по текущему состоянию и входному символу определяет выходной символ. Для ϕ и ψ верны следующие выражения:

- 1) $\forall q_f \in Q^f, \forall a \in A^+ : \phi(a, q_f) = q_f, \psi(a, q_f) = \lambda$;
- 2) $\forall q \in Q, \exists a \in A : \psi(a, q) = \lambda \implies q \in Q^f$;
- 3) $\forall q \in Q \setminus Q^f : \phi(\lambda, q) \in Q^f, \psi(\lambda, q) = \lambda$.

Далее будем рассматривать автоматы с совпадающими входными и выходными алфавитами $A = B$.

Пусть даны автоматы $\mathcal{A}_1 = (A^+, A^+, Q_1, Q_1^f, \phi_1, \psi_1, q_1^0)$ и $\mathcal{A}_2 = (A^+, A^+, Q_2, Q_2^f, \phi_2, \psi_2, q_2^0)$.

Определение 2. Функциональной суперпозицией автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ называется автомат $\mathcal{A}_2(\mathcal{A}_1) = (A^+, A^+, Q, Q^f, \phi_3, \psi_3, q^0)$, где $Q = Q_1 \times Q_2$; $Q^f = \{(q_1, q_2) | (q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2 : (q_1 \in Q_1^f) \vee (q_2 \in Q_2^f)\}$;
 $\forall q \in Q : q = (q_1, q_2), \forall a \in A :$
 $\phi_3(q, a) = (\phi_1(q_1, a), \phi_2(q_2, \psi_1(a, q_1))), \psi_3(a, q) = \psi_2(q_2, \psi_1(a, q_1));$
 $q^0 = (q_1^0, q_2^0).$

Содержательно это та же операция над абстрактными автоматами, которая определена в [1] над структурными автоматами. Там, и в других классических работах она называется просто "суперпозицией".

Пусть даны два автомата $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Определим операцию автоматной суперпозиции автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ по финальному состоянию q_f ($q_f \in Q_1$), результат которой, автомат $\mathcal{A}$ обозначим как $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 q_f \mathcal{A}_2$.

Определение 3. Определим $\mathcal{A}$ через его диаграмму Мура. Диаграмма Мура $\mathcal{A}$ строится как объединение диаграмм Мура автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Путем склейки финального состояния q_f автомата $\mathcal{A}_1$ с начальным состоянием автомата $\mathcal{A}_2$, причем все ребра раннее выходящие из вершины q_f убираются.

Эта операция была введена Н.Ю. Волковым в 2007 г. в работе [2], как композиция автоматов. Позднее, в работе [3] на множестве введенных там же парных функций определялась операция обобщенной суперпозиции (позднее она стала называться просто суперпозицией парных функций).

Основные результаты

Лемма 1. Для любых двух автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, у которых начальные состояния не являются финальными, для любого достижимого финального состояния q_f автомата $\mathcal{A}_1$ верно: $\mathcal{A}_2(\mathcal{A}_1) \not\sim \mathcal{A}_1 q_f \mathcal{A}_2$

Лемма 2. Для любых двух автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ и финального состояния q_f автомата $\mathcal{A}_1$ верно: $\mathcal{A}_2(\mathcal{A}_1) \sim \mathcal{A}_1 q_f \mathcal{A}_2$ тогда и только тогда, когда верно одно из условий:

- 1) состояние q_f недостижимое и автомат $\mathcal{A}_2$ реализует тождественную функцию $f(\alpha) = \alpha$ на множестве непустых слов α ;
- 2) начальные состояния автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ являются финальными.

Источники и литература

- 1) Теория Автоматов: учебник для бакалавриата и магистратуры / В.Б. Кудрявцев, С.В. Алешин, А.С. Подколзин. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2019.-320 с. - Серия: Бакалавр и магистр. Академический курс.
- 2) Н.Ю. Волков. "Об автоматной модели преследования". Дискретная математика, т.19, вып.2, стр. 131-160, 2007 г.
- 3) М.М. Илхомов "Парные функции и вычислительные системы". Международная конференция "Математика в созвездии наук". Тезисы докладов, стр. 322-324. Москва, издательство Московского университета, 2024.