

Лоренцева плоскость анти-де Ситтера

Научный руководитель – Сачков Юрий Леонидович

Али Антон Зульфикарович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории динамических систем, Москва,
Россия

E-mail: tonych777@googlegmail.com

Аннотация. В данной работе исследуется двумерная лоренцева задача на плоскости анти-де Ситтера. С использованием методов геометрической теории управления и дифференциальной геометрии описано множество достижимости, исследован вопрос существования лоренцевых длиннейших, вычислены экстремальные траектории, построен оптимальный синтез, описаны лоренцевы расстояние и сферы.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}_2^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) | x_i \in \mathbb{R}\}$ с псевдоевклидовой метрикой $ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2$. Обозначим однополостный гиперболоид

$$H_1^2 = \{x \in \mathbb{R}_2^3 | -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = -1\},$$

параметризуем его как

$$x_1 = \operatorname{ch} \theta \cos \varphi, \quad x_2 = \operatorname{ch} \theta \sin \varphi, \quad x_3 = \operatorname{sh} \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), \quad (1)$$

и зададим на H_1^2 лоренцеву метрику $g = ds^2|_{H_1^2}$.

Определение. Двумерное пространство анти-де Ситтера [1] есть односвязное накрывающее многообразие гиперболоида H_1^2

$$\widetilde{H}_1^2 = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2\},$$

на котором задана лоренцева метрика $\tilde{g}$, индуцированная метрикой g . Отметим, что метрика $\tilde{g}$ локально совпадает с g .

Векторные поля X_1, X_2 образуют ортонормированный репер для метрики $\tilde{g}$, если

$$\tilde{g}(X_2, X_2) = -\tilde{g}(X_1, X_1) = 1, \quad \tilde{g}(X_1, X_2) = 0.$$

Предложение 1.

(1) Метрика g , а потому и метрика $\tilde{g}$, имеет следующее выражение:

$$g = -\operatorname{ch}^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2.$$

(2) Ортонормированный репер этих метрик можно выбрать в виде

$$X_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Определение. Лоренцевы длиннейшие для метрики $\tilde{g}$ суть решения следующей задачи оптимального управления:

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad q = (\varphi, \theta) \in M = \widetilde{H}_1^2, \quad (2)$$

$$u \in U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 | u_1^2 - u_2^2 \geq 0, u_1 > 0\}, \quad (3)$$

$$q(0) = q_0 = (\varphi_0, \theta_0), \quad q(t_1) = q_1 = (\varphi_1, \theta_1), \quad (4)$$

$$J = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 - u_2^2} dt \rightarrow \max. \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть $q_0 = (\theta_0, \varphi_0) \in M$. Тогда множество достижимости за произвольное неотрицательное время $\mathcal{A}_{q_0}$ равно

$$V_{q_0} := \{(\theta, \varphi) \in M : \varphi \geq \text{sign}((\theta - \theta_0)) \arctg(\text{sh } \theta) + \varphi_0 - \text{sign}((\theta - \theta_0)) \arctg(\text{sh } \theta_0)\}.$$

Следствие 1. Множество достижимости из точки $q_0 = (\theta_0, \varphi_0) \in M$ за произвольное неположительное время $\mathcal{A}_{q_0}^-$ есть

$$V_{q_0}^- := \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \leq -\text{sign}((\theta - \theta_0)) \arctg(\text{sh } \theta) + \varphi_0 + \text{sign}((\theta - \theta_0)) \arctg(\text{sh } \theta_0)\}.$$

Теорема 2. Пусть $q_0 = (\theta_0, \varphi_0) \in M$ и

$$\mathcal{B}_{q_0} := \{(\theta, \varphi) \in M \mid \pi + \varphi_0 - \text{sign}((\theta - \theta_0))(\arctg(\text{sh } \theta) - c_0) - 2c_0 \text{sign}(\theta_0) > \varphi,$$

$$\varphi \geq \varphi_0 + \text{sign}((\theta - \theta_0))(\arctg(\text{sh } \theta) - c_0)\}, \text{ где } c_0 = \arctg(\text{sh } \theta_0).$$

Тогда для любой точки $q_1 \in \mathcal{B}_{q_0}$ существует оптимальная траектория в задаче (2)–(5).

Предложение 2. Экстремали Принципа Максимиума Понтрягина задачи (2)–(5) следующие:

- Анормальные траектории суть светоподобные траектории, и с точностью до перепараметризации

$$u_1 = \pm u_2 = 1, \\ \varphi(t) = \pm \arctg\{\text{sh}(\pm t + \theta_0)\} + \varphi_0 \mp \arctg\{\text{sh } \theta_0\}, \quad \theta(t) = \pm t + \theta_0.$$

- Нормальные экстремали с начальным условием $\theta(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = \psi_0$ имеют следующий вид:

$$(1) \text{ при } \psi_0 = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \theta(t) \equiv 0, \\ \psi(t) \equiv 0, \\ \varphi(t) = t, \end{cases} \quad (6)$$

$$(2) \text{ при } \psi_0 \neq 0, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2)$$

$$\begin{cases} \theta(t) = \text{arsh}(\text{sh } \psi_0 \sin t), \\ \psi(t) = \text{arsh}\left(\frac{\text{sh } \psi_0 \cos t}{\sqrt{\cos^2 t + \text{ch}^2 \psi_0 \sin^2 t}}\right), \\ \varphi(t) = \arctg(\text{ch } \psi_0 \text{tg } t), \end{cases} \quad (7)$$

которое продолжается для всех $t \in (-\infty, +\infty)$ как

$$\begin{cases} \theta(t) = \operatorname{arsh}(\operatorname{sh} \psi_0 \sin t), \\ \psi(t) = \operatorname{arsh}\left(\frac{\operatorname{sh} \psi_0 \cos t}{\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{ch}^2 \psi_0 \sin^2 t}}\right), \\ \varphi(t) = n\pi + \varphi_0(t - n\pi), \quad t \in [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2), \end{cases} \quad (8)$$

где $n \in \mathbb{Z}$ и

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} -\pi/2, & t = -\pi/2, \\ \operatorname{arctg}(\operatorname{ch} \psi_0 \operatorname{tg} t), & t \in (-\pi/2, \pi/2), \\ \pi/2, & t = \pi/2. \end{cases}$$

Определение. Определим экспоненциальное отображение

$$\operatorname{Exp} : N \rightarrow M, \quad N = \left(T_{q_0}^* M \cap \left\{ h_1 = -\sqrt{1 + h_2^2} \right\} \right)_{\psi_0} \times (0, \pi)_t = \{(\psi_0, t) \mid \psi_0 \in \mathbb{R}, t \in (0, \pi)\},$$

$$\operatorname{Exp}(\psi_0, t) = q(t) = (\theta(t), \varphi(t)),$$

где

$$\begin{cases} \theta(t) = \operatorname{arsh}(\operatorname{sh} \psi_0 \sin t), \\ \varphi(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{ch} \psi_0 \operatorname{tg} t), & t \in (0, \pi/2), \\ \pi/2, & t = \pi/2, \\ \pi + \operatorname{arctg}(\operatorname{ch} \psi_0 (\operatorname{tg}(t - \pi))), & t \in (\pi/2, \pi). \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

Теорема 3. Экспоненциальное отображение задаёт гомеоморфизм областей

$$A' = \{(\psi_0, t) : \psi_0 \in \mathbb{R}, t \in (0, \pi)\}, \quad C' = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{arctg} \operatorname{sh} |\theta| < \varphi < \pi - \operatorname{arctg} \operatorname{sh} |\theta|\}$$

и диффеоморфизм областей

$$A = \{(\psi_0, t) : \psi_0 \in \mathbb{R}, t \in (0, \pi/2)\}, \quad C = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{arctg} \operatorname{sh} |\theta| < \varphi < \pi/2\},$$

а также областей

$$\tilde{A} = \{(\psi_0, t) : \psi_0 \in \mathbb{R}, t \in (\pi/2, \pi)\}, \quad \tilde{C} = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \pi/2 < \varphi < \pi - \operatorname{arctg} \operatorname{sh} |\theta|\}.$$

Теорема 4.

- (1) Если точка $q_1 = (\theta_1, \varphi_1)$ принадлежит нижней границе множества $\mathcal{B}_{(0,0)} = \{(\theta, \varphi) \in M : \pi - \operatorname{arctg} \operatorname{sh} |\theta| > \varphi \geq \operatorname{arctg} \operatorname{sh} |\theta|\}$, то оптимальная траектория, соединяющая начало координат и q_1 , существует, единственна и является аномальной экстремалью, а лоренцево расстояние от $(0, 0)$ до q_1 равно 0.
- (2) Если точка $q_1 = (\theta_1, \varphi_1) \in \operatorname{Int}(\mathcal{B}_{(0,0)})$, то оптимальная траектория, соединяющая начало координат и q_1 , существует, единственна и является нормальной экстремалью с начальным условием ψ_{q_1} , а лоренцево расстояние от $(0, 0)$ до q_1 равно t_{q_1} , где

$$\psi_{q_1} = \operatorname{arsh} \left(\operatorname{sh} \theta_1 \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 - \operatorname{sh}^2 \theta_1}} \right), \quad (10)$$

$$t_{q_1} = \begin{cases} \arcsin \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 - \operatorname{sh}^2 \theta_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}}, & \varphi_1 \in (0, \pi/2), \\ \pi/2, & \varphi_1 = \pi/2, \\ \pi - \arcsin \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 - \operatorname{sh}^2 \theta_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}}, & \varphi_1 \in (\pi/2, \pi). \end{cases} \quad (11)$$

Единственность оптимальной траектории понимается с точностью до перепараметризации.

Теорема 5. Для точек $(\theta_1, \varphi_1) \in M$, таких что $\varphi_1 > \pi - \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} |\theta_1|)$, не существует оптимальной траектории, начинающейся в точке $(\theta_0, \varphi_0) = (0, 0)$. Лоренцево расстояние от этой точки до точки (θ_1, φ_1) равно $+\infty$.

Теорема 6. Для точек $\tilde{q} = (\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) \in M$, т.ч. $\tilde{\varphi} = \pi - \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} |\tilde{\theta}|)$, лоренцево расстояние от точки $(0, 0)$ равно π . Для точки $(0, \pi)$ существует континуум оптимальных траекторий от точки $(0, 0)$. Для других точек данной кривой оптимальных траекторий нет.

Предложение 3.

- (1) Расстояние от точки $q_0 = (0, 0)$ до любой точки $q_1 \in \operatorname{Int}(\mathcal{B}_{(0,0)})$ задаётся вещественно-аналитической функцией

$$d(q_0, q_1) = t_{q_1} = \arccos(\cos \varphi \operatorname{ch} \theta). \quad (12)$$

- (2) Пусть точка $q_1 = (\theta_1, \varphi_1)$ удовлетворяет условию $\varphi_1 = \operatorname{arctg} \operatorname{sh} |\theta_1|$, т.е. она принадлежит нижней части границы $\partial \mathcal{B}_{(0,0)}$. Определим 1-форму $l = -\operatorname{sh} 2\theta_1 \cos^2 \varphi_1 d\theta + \sin 2\varphi_1 \operatorname{ch}^2 \theta_1 d\varphi$. Если $q = (\theta, \varphi) \in \operatorname{Int}(\mathcal{B}_{(0,0)})$ и $q \rightarrow q_1$ так, что

$$\frac{(\Delta\theta, \Delta\varphi)}{\sqrt{(\Delta\theta)^2 + (\Delta\varphi)^2}} \rightarrow v, \quad \Delta\theta = \theta - \theta_1, \quad \Delta\varphi = \varphi - \varphi_1, \\ l(v) \neq 0,$$

$$\text{то } d(q_0, q) = \sqrt{l(\Delta\theta, \Delta\varphi)}(1 + o(1)).$$

Следствие 2. Лоренцева сфера радиуса $r \in (0, \pi)$ задается уравнением

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\cos r}{\operatorname{ch} \theta}\right).$$

Определение. Векторное поле X называется полем Киллинга метрики g , если производная Ли метрики вдоль него равно нулю, то есть $L_X g = 0$.

Теорема 7.

- (1) Алгебра Ли полей Киллинга пространства анти-де Ситтера M с метрикой $\tilde{g}$ трехмерна и её базисные векторные поля можно выбрать в виде

$$\hat{X}_1 = \operatorname{ch} \theta X_1 = \partial_\varphi, \quad \hat{X}_2 = \operatorname{sh} \theta \cos \varphi X_1 + \sin \varphi X_2, \quad \hat{X}_3 = -\operatorname{sh} \theta \sin \varphi X_1 + \cos \varphi X_2.$$

- (2) Для их коммутаторов верны следующие соотношения:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_3, \quad [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = -\hat{X}_1, \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_1] = \hat{X}_2.$$

- (3) Алгебра Ли полей Киллинга изоморфна $\mathfrak{sl}(2)$.

Предложение 4. Система ОДУ, определяемая векторным полем $\hat{X}_1$:

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\varphi} = 1 \quad (13)$$

имеет следующие решения с начальными условиями $\theta(0) = \theta_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$:

$$\theta(t) \equiv \theta_0, \quad \varphi(t) = t + \varphi_0.$$

Теорема 8. Система ОДУ, определяемая векторным полем $\hat{X}_2$:

$$\dot{\theta} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \cos \varphi \tanh \theta \quad (14)$$

имеет первый интеграл $C = \cos \varphi \cosh \theta \in \mathbb{R}$. Пусть $s_1 = \text{sign}(\cos \varphi_0)$, $s_2 = \text{sign}(\sin \varphi_0)$, $s_3 = \text{sign}(\theta_0)$, $n = [(\varphi_0 + \pi/2)/(2\pi)]$. Тогда система (14) имеет следующие решения с начальными условиями $\theta(0) = \theta_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$ в зависимости от значения C .

1) Если $C = 0$, то $\varphi(t) \equiv \varphi_0$, $\theta(t) = \theta_0 + s_2 t$.

2) Пусть $C^2 = 1$.

2.1) Если $\sin \varphi_0 = 0$, то $\varphi(t) \equiv \varphi_0$, $\theta(t) \equiv \theta_0$.

2.2) Если $\sin \varphi_0 \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \text{arsh}(\sinh \theta_0 \exp(s_2 s_3 t)), \\ \varphi(t) &= \begin{cases} s_2 s_3 \arcsin(\tanh \theta(t)) + 2\pi n & \text{при } s_1 = 1, \\ \pi - s_2 s_3 \arcsin(\tanh \theta(t)) + 2\pi n & \text{при } s_1 = -1. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

3) Если $C^2 \in (0, 1)$, то

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \text{arsh}(\sqrt{1 - C^2} \sinh \tau), \quad \tau = s_2 t + \text{arsh}(\sinh \theta_0 / \sqrt{1 - C^2}), \\ \varphi(t) &= \begin{cases} s_2 \arcsin \sqrt{1 - C^2 / \cosh^2 \theta(t)} + 2\pi n & \text{при } s_1 = 1, \\ \pi - s_2 \arcsin \sqrt{1 - C^2 / \cosh^2 \theta(t)} + 2\pi n & \text{при } s_1 = -1. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

4) Если $C^2 > 1$, то

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \begin{cases} \arcsin x + 2\pi n & \text{при } s_1 = 1, \\ \pi - \arcsin x + 2\pi n & \text{при } s_1 = -1, \end{cases} \\ \theta(t) &= s_3 \text{arch}(C / \cos \varphi(t)), \end{aligned} \quad (17)$$

где $x = (|s| - C^2 + 1)/(2\sqrt{s})$, $s = (e^\tau s_+ + s_-)/(1 + e^\tau)$, $s_\pm = C^2 + 1 \pm 2|C|$, $\tau = s_1 s_3 (s_+ - s_-)t / (2C) + \ln((s_0 - s_-)/(s_+ - s_0))$, $s_0 = r^2$, $r = \sqrt{x_0^2 + C^2 - 1} + x_0$, $x_0 = \sin \varphi_0$.

Замечание. Так как поле $\hat{X}_3$ получается из поля $\hat{X}_2$ сдвигом вдоль φ на $\pi/2$, достаточно проинтегрировать только $\hat{X}_2$.

Обозначим через $e^{tX} : M \rightarrow M$ поток векторного поля X на многообразии M .

Теорема 9. Лоренцево расстояние между двумя произвольными точками $q_0, q_1 \in M$ равно $d(\tilde{q}_0, \tilde{q}_1)$, где $\tilde{q}_0 = (0, 0) = e^{(-\theta_0 \hat{X}_3)} \circ e^{(-\varphi_0 \hat{X}_1)}(q_0)$ и, соответственно, $\tilde{q}_1 = e^{(-\theta_0 \hat{X}_3)} \circ e^{(-\varphi_0 \hat{X}_1)}(q_1)$.

Источники и литература

- 1) Beem, J.K., Ehrlich, P.E., Easley, K.L.: Global Lorentzian Geometry. Monographs Textbooks Pure Appl. Math. 202, Marcel Dekker Inc. (1996)

- 2) А.А. Азрачев, Ю. Л. Сачков, *Fizmatlit, Moscow 2004; English transl.* Геометрическая теория управления, *Физматлит, 2005.*
- 3) Сачков Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления, *М.: URSS, 2021.*
- 4) Ю. Л. Сачков, *Существование сублоренцевых длинейших*, Дифференциальные уравнения. 59, 12, 1702–1709 (2023)
- 5) O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, *Academic Press, 1983.*
- 6) Yu.L. Sachkov, *Lorentzian distance on the Lobachevsky plane*, submitted.
- 7) N. Jacobson, *Lie Algebras*, *Dover Publications, New York, 1979*
- 8) Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов, *М.: Наука, 1961.*