

Аналитический и численный анализ знакопостоянных сингулярных решений уравнений Лейна-Эмдена

Научный руководитель – Асташова Ирина Викторовна

Матюнина Юлия Алексеевна

Студент (бакалавр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва,
Россия

E-mail: ymatyunina@yandex.ru

В работе предложен новый подход к аппроксимации сингулярных решений нелинейных уравнений Лейна–Эмдена, характеризующихся вертикальной асимптотой. Для построения решений используются функции Гудермана и нейросетевые методы. Для определения положения асимптоты и начальной настройки коэффициентов применялся аналитический подход, выработанный И.В. Асташовой и Т.А. Корчемкиной:

$$x^* - x_0 < \zeta \cdot y'(x_0)^{-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}}.$$

Для приближения используется линейная комбинация базисных функций

$$G(w, p, x) = 2 \arctan\left(\exp(wx + p)\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, решение представляется в виде

$$y(x) = \frac{N(x)}{x - x_0}, \quad \text{где} \quad N(x) = \sum_{k=0}^{m-1} q_k G(w_k, p_k, x).$$

Данный подход позволяет учитывать резкие изменения производной вблизи асимптоты. Традиционные полиномиальные аппроксимации для этого не подходят.

Для определения коэффициентов при базисных функциях используются два метода: прямая оптимизация параметров и применение многослойного персептрона (MLP). В экспериментальной части приближаются решения уравнений

$$y'' = p(x) y^3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

где $p(x)$ – это потенциал вида x (линейный) или $\sin(x)$ (нелинейный).

Качество аппроксимаций оценивалось по трём метрикам: коэффициент неравенства Тейла (TIC), эффективность Нэша–Сатклиффа (NSE) и показатель учтённой дисперсии (VAF). Результаты показали, что методы на основе функций Гудермана значительно превосходят полиномиальные аппроксимации. При этом метод с использованием MLP демонстрирует наилучшие метрики, особенно для задачи с нелинейным потенциалом $\sin(x)$.

Предложенный подход позволяет получать приближённые аналитические сингулярные решения уравнений Лейна–Эмдена. Это особенно актуально для многомерных задач, где численные методы, такие как метод Рунге–Кутты, менее удобны. Дальнейшие исследования будут направлены на оптимизацию архитектуры нейронных сетей и расширение области применения методики на другие подвиды уравнений Лейна–Эмдена.

Источники и литература

- 1) Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1954.
- 2) Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
- 3) Корчемкина Т.А. Асимптотические и качественные свойства решений дифференциальных уравнений: дис. канд. физ.-мат. наук. М., 2021.
- 4) Astashova V. Asymptotic behavior of singular solutions of Emden–Fowler type equations. *Differential Equations*, 2019. 55(5): 581–590.
- 5) Nisar K. et al. Evolutionary integrated heuristic with Gudermannian neural networks for second kind of Lane–Emden nonlinear singular models. *Applied Sciences*, 2021.
- 6) He J. et al. A deep-learning-based method for solving nonlinear singular Lane–Emden type equation. *IEEE Access*, 2020.
- 7) Zhang Y. et al. Analysis of third-order nonlinear multi-singular Emden–Fowler equation by using the LeNN–WOA–NM algorithm. *IEEE Access*, 2021.