Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Усреднение уравнений Навье - Стокса в области, перфорированной вдоль границы

Научный руководитель – Чечкин Григорий Александрович

Мурад Апаев Рауф оглы
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: apayevmr@gmail.com

Постановку задачи начнём с описания области. Обозначим через Ω область в $\mathbb{R}^2$, лежащую в верхней полуплоскости, граница которой Γ является кусочно-гладкой и состоит из нескольких частей: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где Γ_4 — отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ на оси абсцисс, Γ_2 и Γ_3 принадлежат прямым $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{1}{2}$ соответственно, $\Gamma \backslash \Gamma_4$ — гладкая. Всюду далее $\varepsilon = \frac{1}{2\mathcal{N}+1}$ — малый параметр, $\mathcal{N}$ — натуральное число, $\mathcal{N} \gg 1$.

Будем также использовать следующие обозначения. Пусть G — произвольная двумерная область с гладкой границей, лежащая в круге $K = \{\xi : \xi_1^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 < a^2\}$, $0 < a < \frac{1}{2}$. Обозначим $G_\varepsilon^j = \{x \in \Omega : \varepsilon^{-1}(x_1 - j, x_2) \in G\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $G_\varepsilon = \bigcup\limits_j G_\varepsilon^j$, $\Gamma_\varepsilon = \partial G_\varepsilon$. Определим область Ω_ε как $\Omega \setminus \overline{G_\varepsilon}$ (см. рис. 1).

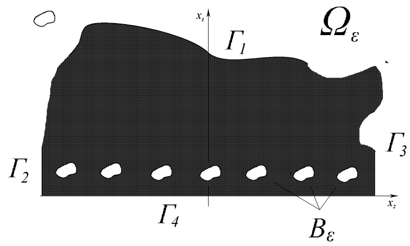

Рис. : Область

Рассматривается задача вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta u_\varepsilon + (u_\varepsilon, \nabla) u_\varepsilon = g(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t > 0, \\ (\nabla, u_\varepsilon) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, t > 0, \\ \nu \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma_4, t > 0, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, t > 0, \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t) = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)$, $g = g(x_1, x_2) = (g^1, g^2), g_j \in L_2(\Omega)$, n — вектор внешней нормали к границе и $\nu > 0$. Также рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \Delta u_0 + (u_0, \nabla) u_0 = g(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ (\nabla, u_0) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u_0 = 0, & x \in \Gamma, t > 0, \\ u_0 = U(x), & x \in \Omega, t = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Продолжим решение задачи (1) нулём внутрь пор. Имеет место утверждение.

Теорема. *Пусть* u_ε *— решение задачи* (1), u_0 *— решение задачи* (2)*. Тогда, при стремлении малого параметра* ε *к нулю имеем:* $u_\varepsilon \to u_0$ *сильно в* $L_2((0,T), L_2(\Omega))$.

Аналогичные результаты для параболического уравнения получены в [1].

Список литературы

[1] Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Meidell A., Persson L.-E. On the Friedrichs inequality in a domain perforated along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics in parabolic problems // Russian Journal of Mathematical Physics.- 2009.- v. 16, No 1.- p. 1–16.