Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Предельное поведение распределённой системы Лотки-Вольтерры с нелинейной кросс-диффузией

Научный руководитель – Розанова Ольга Сергеевна

Ефимова Арина Олеговна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: arinaemrs@gmail.com

В настоящей работе изучается предельное поведение решения $u(t,x) = (u_1,\dots,u_n)$, $x \in \Omega \in \mathbb{R}^m$, $t > 0$, начально-краевой задачи для системы уравнений реакции-диффузии вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x,t) = u_i\big(f_i(u) + D(\Delta u)\big)_i \quad i = 1,2,...,n, \tag{1}$$

где $f_i(u) = r_i - (Au)_i$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $(Au)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j$, $r = (r_1, r_2, ..., r_n) \neq 0$, $r_i \in \mathbb{R}$, $D = (d_{ij})_{i,j=1}^n$, $(D(\Delta u))_i = \sum_{j=1}^n d_{ij}\Delta u_j(x,t)$. Область Ω ограничена, ее граница γ предполагается гладкой. Такая система возникает в задачах популяционной динамики [1]. Матрицы D описывают кросс-диффузионное влияние популяции видов, элемент d_{ij} матрицы характеризует интенсивность влияния случайных перемещений вида с номером j на динамику вида с номером i. Система (1) рассматривается вместе с начальными условиями

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), i = 1,2,...,n, \tag{2}$$

и однородными граничными условиями Неймана

$$\left(\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial \nu}\right)_\gamma = 0, \tag{3}$$

где ν - внешняя нормаль к границе γ. Решение задачи (1) - (3) будем понимать в слабом смысле, как элемент пространства $W_2^r(\Omega_t)$, где $r = 1$, если $\dim\Omega = 1$ и $r = 2$, если $\dim\Omega = 2,3$. При каждом $t \geq 0$ функция $u(x,t)$ принадлежит пространству Соболева вектор-функций $W_2^r(\Omega)$ и при каждом $x \in \Omega$ является гладкой вектор-функцией переменной $t \geq 0$. Из теорем вложения следует, что вектор-функции $u(x,t)$ при каждом $t > 0$ являются непрерывными почти всюду вектор-функциями переменной $x \in \Omega$.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dw_i(t)}{dt} = w_i(t)\Big(r_i - (Aw)_i\Big), \quad i = 1,2,...,n. \tag{4}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть матрица A такова, что $(A\xi,\xi) \geq 0, \forall\xi \in \mathbb{R}^n$, и матрица D положительно определена. Тогда задача (1) - (3) не имеет зависящих от x стационарных решений (положений равновесия) в пространстве функций $W_2^r(\Omega)$. Множество постоянных решений совпадает с множеством положений равновесия системы (4).*

Теорема 2. *Пусть матрицы A и D положительно определены и стационарное решение (положение равновесия) задачи (1) - (3) отлично от нуля. Если это положение равновесия асимптотически устойчиво для системы (4), то оно будет асимптотически устойчивым для системы (1) - (3) в пространстве $W_2(\Omega_t)$.*

Также приведены результаты численного моделирования, из которых следует, что при невыполнении условий Теоремы 2 стационарное решение задачи (1) - (3) может быть неустойчивым.

Вопрос о существовании и единственности решения этой задачи выходит за рамки работы.

Список литературы

[1] *Братусь А.С., Дрожжин С.В., Якушкина Т.С.* Математические модели эволюции и динамики репликаторных систем. Москва, URSS, 2022. ISBN: 978-5-9710-9832-4