

Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О множестве предельно реализуемых значений топологической энтропии непрерывных отображений отрезка

Научный руководитель – Ветохин Александр Николаевич

Шапетько Артем Олегович

Студент (магистр)

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,

Фундаментальные науки, Москва, Россия

E-mail: wwwartiomwww@gmail.com

Пусть X — компактное метрическое пространство, а $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N},$$

где f^i , $i \in \mathbb{N}$, — i -я итерация отображения f , $f^0 \equiv \text{id}_X$. Для всяких $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(f, \varepsilon, n)$ максимальное число точек в X , попарные d_n^f -расстояния между которыми больше, чем ε . Тогда *топологическую энтропию* отображения f определяют формулой

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, \varepsilon, n). \quad (1)$$

Отметим, что величина (1) не изменится, если в ее определении метрику d заменить на любую другую, задающую на X ту же, что и d , топологию. Обозначим $C(X, X)$ пространство непрерывных функций из X в X с метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Рассмотрим функцию

$$f \rightarrow h_{\text{top}}(f). \quad (2)$$

В работе [2] доказано, что функция (2) принадлежит второму борелевскому классу на пространстве $C(X, X)$, и множество точек пространства $C(X, X)$, в которых функция (2) полунепрерывна снизу, содержит плотное в пространстве $C(X, X)$ множество типа G_δ , а в работе [3] установлено, что само множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным в $C(X, X)$ множеством типа G_δ . Обозначим через $E_h(f)$ *множество предельно реализуемых значений топологической энтропии*, т. е. множество тех значений топологической энтропии, которые получаются при сколь угодно малых равномерных возмущениях отображения f :

$$E_h(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{h_{\text{top}}(g) : \rho(f, g) < \frac{1}{n}\}.$$

Если X — канторовское совершенное множество на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой, то для любого отображения f имеем равенство $E_h(f) = [0; \infty]$ [4], из которого следует, что множество точек непрерывности функции (2) пусто, множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным G_δ -множеством и совпадает с множеством нулей функции (2), а множество точек полунепрерывности сверху функции (2) совпадает с точками, в которых значение функции (2)

равно бесконечности. Если $X = [0, 1]$, то в силу полунепрерывности снизу функции (2) [5], для любого непрерывного отображения f выполнено равенство $\min E_h(f) = h_{\text{top}}(f)$. Из [6, с. 216] вытекает:

Теорема 1. Для любого $f \in C([0, 1], [0, 1])$ верно равенство $\max E_h(f) = \infty$.

Из теоремы 1, результата работы [5] и теоремы Бэра о функциях 1-го бэровского класса вытекает, что точки непрерывности функции (2) образуют всюду плотное G_δ -множество, в каждой точке которого энтропия бесконечна.

Теорема 2. Если отображение $f \in C([0, 1], [0, 1])$ имеет неподвижную точку x_0 , удовлетворяющую условиям

$$f([0, x_0]) = [0, x_0] \quad \text{и} \quad f([x_0, 1]) = [x_0, 1]$$

или

$$f([0, x_0]) = [x_0, 1] \quad \text{и} \quad f([x_0, 1]) = [0, x_0],$$

то верно равенство

$$E_h(f) = [h_{\text{top}}(f), +\infty].$$

Следствие 1. Если $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — гомеоморфизм, то $E_h(f) = [0, +\infty]$.

Следствие 2. Если $f \in C(X, X)$ и $f(0) = 0$, то $E_h(f) = [h_{\text{top}}(f), +\infty]$. В частности, для логистического отображения $f(x) = 4x(1 - x)$ имеем

$$E_h(f) = [\ln 2, +\infty].$$

Источники и литература

- 1) Динабург, Е. И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем / Е. И. Динабург // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1971. — Т. 35, № 2. — С. 324–366.
- 2) Ветохин, А. Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов / А. Н. Ветохин // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 448–453.
- 3) Ветохин, А. Н. Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра / А. Н. Ветохин // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. — 2019. — № 4. — С. 69–71.
- 4) Ветохин, А. Н. Множество предельно реализуемых значений топологической энтропии непрерывных отображений множества Кантора / А. Н. Ветохин // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. — 2023. — № 3. — С. 35–45
- 5) Misiurewicz, M. Horseshoes for mappings of the interval / M. Misiurewicz // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astron. et Phys. — 1979. — 27. — P. 167–169
- 6) Block, L. S. Dynamics in One Dimension / L. S. Block, W. A. Coppel // Lecture Notes in Math. 1513, Springer, Berlin-Heidelberg-New York. — 1992