

Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Динамика асимметричного маятника в разреженном потоке

Научный руководитель – Давыдов Алексей Александрович

Зиятдинов Наиль Равильевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории динамических систем, Москва,
Россия

E-mail: nail.ziatdinov@math.msu.ru

Мы изучаем движение маятника на плоскости, являющегося массивным стержнем, прикрепленным к опорной точке, вокруг которой он может свободно вращаться, в предположениях, что силы гравитации нет, но есть поток невзаимодействующих точечных частиц, движущихся с одной и той же фиксированной ненулевой скоростью и взаимодействующих со стержнем не более одного раза по закону бильярдного отражения. Наша цель - дать полное описание фазового портрета такой модели.

С помощью изменения масштаба длины, добьемся, чтобы "большая" часть флюгера от опорной точки имела длину 1, а "меньшая" ($-a$) при $a \in (-1, 0]$, аналогичным изменением масштаба времени сделаем величину скорости потока - единицей.

Обозначая через $x, x = x(t)$, угол между большей частью маятника (от опорной точки) и направлением вектора скорости потока, придем в следующем уравнении динамики

$$\ddot{x} = -\kappa \int_a^1 (\sin x + r\dot{x}) |\sin x + r\dot{x}| r dr, \quad (1)$$

где $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ первая и вторая производная от x по t , а параметр $\kappa = \frac{2\rho}{I}$, где ρ - плотность потока, а I моменту инерции маятника.

Интегрирование происходит по-разному в зависимости от значений x и $\dot{x}$. Аналогично имеют место четыре случая:

$$(a) \sin x + r\dot{x} \geq 0 \text{ для всех } r \in [a, 1]. \quad \ddot{x} = -\kappa \left[\frac{1-a^2}{2} \sin^2 x + 2\frac{1-a^3}{3} \dot{x} \sin x + \frac{1-a^4}{4} \dot{x}^2 \right] \quad (2)$$

$$(b) \sin x + a\dot{x} \geq 0 \text{ и } \sin x + \dot{x} < 0. \quad \ddot{x} = \kappa \left[\frac{1+a^2}{2} \sin^2 x + 2\frac{1+a^3}{3} \dot{x} \sin x + \frac{1+a^4}{4} \dot{x}^2 - \frac{1}{6} \frac{\sin^4 x}{\dot{x}^2} \right] \quad (3)$$

а также

$$(c) \sin x + a\dot{x} < 0 \text{ и } \sin x + \dot{x} \geq 0, \text{ и } (d) \sin x + r\dot{x} < 0 \text{ для всех } r \in [a, 1],$$

в которых результат интегрирования с точностью до знака равен значению в случаях соответственно (b) и (a) в силу симметричности модели относительно смены знака x .

Стандартным вводом новой переменной $y = \dot{x}$ уравнение динамики перепишем в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \kappa v(x, y), \quad (6)$$

где $v = v(x, y)$ с коэффициентом κ равно правой части уравнения в каждом из случаев. Несложно заметить, что с точностью до периода по x система имеет две особые точки: $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$, обе вырожденные. По аналогии с [1] показываем, что топологически эти точки являются фокусом и седлом соответственно, а затем устанавливаем, что фазовый портрет изучаемой системы с точностью до гомеоморфизма совпадает с фазовым портретом классической модели математического маятника с трением $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + k \sin x = 0$ с положительными α и k [2].

Источники и литература

- 1) [1] Davydov A., Plakhov A. Dynamics of a pendulum in a rarefied flow, Regular and Chaotic Dynamics, 2024, 29:1, 134–142
- 2) [2] Arnol' V.I., Ordinary differential equations, MIT Press, Cambridge, MA–London, 1978, ix+280 pp