

Свойства решений дискретного аналога дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера

Научный руководитель – Асташова Ирина Викторовна

Коробко Евгения Владимировна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва,
Россия

E-mail: jakovi300195@yandex.ru

Рассмотрим дискретное уравнение следующего вида $\Delta^2 u(k) \pm k^\alpha u^m(k) = 0$, $k \in \mathbb{N}(k_0) \equiv \{k_0, k_0 + 1, \dots\}$, (1) где $\alpha, m \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $m \neq \{0, 1\}$ и $k_0 \in \mathbb{N}$, $\Delta u(k) \equiv u(k+1) - u(k)$ и $\Delta^2 u(k) \equiv \Delta(\Delta u(k)) = u(k+2) - 2u(k+1) + u(k)$ – первая и вторая разности искомой функции $u: \mathbb{N}(k_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Уравнение (1) является дискретным аналогом нелинейного уравнения второго порядка типа Эмдена-Фаулера [1, глава 7] $y''(x) \pm x^\alpha y^m(x) = 0$, где вторая производная заменяется второй разностью.

Определение. Функцию $u_{app}: \mathbb{N}(k_0) \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *приближенным решением* уравнения (1) *порядка* $g: \mathbb{N}(k_0) \rightarrow \mathbb{R}$, если $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\Delta^2 u_{app}(k) \pm k^\alpha u_{app}^n(k))g(k) = 0$, а если g – степенная функция, то скажем, что это приближенное решение – *степенного вида*.

Теорема 1. Для уравнения (1) функция $u_{app}(k) = ak^{-s} + bk^{-(s+1)}$, $k \in \mathbb{N}(k_0)$, где $s = (\alpha + 2)(m - 1)^{-1}$, $a = (\mp s(s + 1))^{1/(m-1)}$, $b = (as(s + 1))(s + 2 - ms)^{-1}$, является приближенным решением (степенного вида) порядка $g(k) = k^{s+3}$.

Теорема 2. Если существуют такие числа $\gamma \in (0, 1)$, s и $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, что при $P \equiv \frac{\gamma+s+1}{s+1}$ и $Q \equiv \frac{\gamma+s+2}{ms}$ выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий

- 1) $ms > 0$, $s > -1$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1 P$, $\varepsilon_4 < \varepsilon_2 P$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_4 Q$;
- 2) $ms < 0$, $s > -1$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1 P$, $\varepsilon_4 < \varepsilon_2 P$, $\varepsilon_2 < -\varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_1 < -\varepsilon_4 Q$;
- 3) $ms < 0$, $-2 \neq s < -1$, $\varepsilon_4 < -\varepsilon_1 P$, $\varepsilon_3 > -\varepsilon_2 P$, $\varepsilon_2 < -\varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_1 < -\varepsilon_4 Q$;
- 4) $ms > 0$, $-2 \neq s < -1$, $\varepsilon_4 < -\varepsilon_1 P$, $\varepsilon_3 < -\varepsilon_2 P$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_4 Q$,

то для некоторого K при каждом $k_0 > K$ существует решение $u(k)$ уравнения (1), удовлетворяющее при всех $k \in \mathbb{N}(k_0)$ оценкам $|u(k) - ak^{-s} - bk^{-(s+1)}| < \varepsilon_2 |b| k^{-s-\gamma-1}$.

Теорема 3. Пусть $s > 1$. Зафиксируем ε_i , γ_i , $i = 1, 2$, так что $\varepsilon_2 < \varepsilon_1 < 1$, $\gamma_2 < \gamma_1 < 1$. Тогда существует решение $v = v(k)$ другого дискретного аналога дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера $\Delta^2 v(k) = -k^s (\Delta v(k))^3$, такое, что $-\varepsilon_1 |c| k^{-\alpha} < v(k) - ck^{-\alpha} < \gamma_1 |c| k^{-\alpha}$, где $\alpha = (s - 1)/2$, $c = \pm \sqrt{\alpha + 1}/\alpha$.

Благодарности Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Источники и литература

- 1) Белман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений // М.: Иностранная литература. 1954.
- 2) Astashova I., Diblik J., Korobko E. Existence of a solution of discrete Emden–Fowler equation caused by continuous equation // Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series S. 2021. V. 14. № 12. P. 4159–4178.
- 3) Diblik J., Korobko E. Asymptotic behavior of solutions of a second-order nonlinear discrete equation of Emden–Fowler type // Advances in Nonlinear Analysis. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG. (Berlin, Germany). 2023. V. 12. № 1. P. 1–23.