

Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Асимптотика начальных и краевых задач с дискретными аргументами на примере шашек Фейнмана

Научный руководитель – Данилов Владимир Григорьевич

Михайлова Светлана Олеговна

Аспирант

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова, Москва, Россия

E-mail: valsvetmih@yandex.ru

В работе на примере задачи о шашках Фейнмана развивается метод для асимптотического решения разностных уравнений с некомпактным лагранжевым многообразием. Работа является идейным продолжением [1], где рассматривалась задача о случайных блужданиях. Строится осциллирующее решение Вентцеля-Крамера-Бриллюэна (ВКБ) продолженной задачи с помощью техники псевдодифференциальных операторов. Переход от решения непрерывной задачи к решению дискретной задачи осуществляется за счёт теоремы Котельникова. Согласно [2] задача описывается совокупностью двух разностных уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases} a_{1m}^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1m+1}^n + a_{2m+1}^n); \\ a_{2m}^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{2m-1}^n - a_{1m-1}^n); \\ a_{10}^0 = 0; \quad a_{20}^0 = 1; \\ a_{11}^1 = 0; \quad a_{21}^1 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

где a_1, a_2 – координаты вектора состояния, норма которого имеет вероятностный смысл. Применив технику псевдодифференциальных операторов и представив решение в виде ВКБ $\vec{Q} = e^{iS/\hbar} \vec{\varphi}$, получим матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} e^{iS'_t} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{iS'_x} & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{iS'_x} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iS'_x} & e^{iS'_t} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iS'_x} \end{pmatrix} \vec{\varphi} = 0. \quad (2)$$

Решение (2) записывается в виде

$$\begin{aligned} Q(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-ie^{-ip_1} (\sin p_1 + \sqrt{2 - \cos^2 p_1}) \right) e^{\frac{i}{\hbar} (p_1 x + t \arccos(\frac{\cos p_1}{\sqrt{2}}))} dp_1 + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-ie^{-ip_2} (\sin p_2 + \sqrt{2 - \cos^2 p_2}) \right) e^{\frac{i}{\hbar} (p_2 x - t \arccos(\frac{\cos p_2}{\sqrt{2}}))} dp_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Источники и литература

- 1) Данилов В. Г., Михайлова С. О. Туннельные по Маслову асимптотики и случайные блуждания на решетке с дискретным временем // Математические заметки. 2024. Т. 116. № 6. С. 881–897.
- 2) Скопенков М. Б., Устинов А. В. Шашки Фейнмана: к алгоритмической квантовой теории // Успехи математических наук. – 2022. – Т. 77. – №. 3 (465). – С. 73-160.