

Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Об условиях устойчивости некоторой нелинейной биологической модели развития эпидемий

Научный руководитель – Асташова Ирина Викторовна

Габидуллин Давид Альбертович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва,
Россия

E-mail: david0166@mail.ru

Рассматривается динамическая система

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (1-p)a - dS - \frac{\beta IS}{1+\sigma I^k} + \delta V, \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{1+\sigma I^k} - (d + \varepsilon + \eta)E, \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (d + \tau)I, \\ \frac{dV}{dt} = pa + \tau I + \eta E - (d + \delta)V, \end{cases} \quad (1)$$

возникающая в эпидемиологической математической модели с учётом инкубационного периода и временного иммунитета. В этой модели всё население N делится на 4 категории: восприимчивые S , инфицированные E , зараженные I и вакцинированные/выздоровевшие V . Все параметры системы (1) неотрицательны, а их биологическое значение интерпретируется следующим образом: люди рождаются со скоростью a и вступают в класс S , а доля новорожденных эффективно вакцинируется со скоростью p , восприимчивые люди заражаются со скоростью β , временный иммунитет (вызванный идеальной вакциной, болезнью и бессимптомными инфекциями) ослабевает со скоростью δ , все люди в каждом классе имеют одинаковую естественную смертность d , люди в классе E могут переходить в класс I со скоростью ε , а также в класс V со скоростью η (из-за приобретения естественного иммунитета), инфицированные люди эффективно выздоравливают со скоростью τ , а параметры σ и k будут описаны ниже.

Модели $SEIVS$, $SIRS$ с различными показателями инцидентности изучались в работах [1–8]: в [1–4] к моделям $SEIVS$ применялся геометрический подход для установления асимптотической устойчивости и глобальной асимптотичности положений равновесия в зависимости от контрольного числа репродукции R_c , в [5] обобщён геометрический критерий глобальной асимптотичности, в [6, 7] учтены диффузионные эффекты распространения эпидемий в популяции для моделей $SIRS$, в [8] рассматривалась модель SIR с инфекционной силой специального вида.

Ниже рассматривается новая инфекционная сила

$$\varphi(I) := \frac{\beta I}{1+\sigma I^k},$$

где параметры σ и k оценивают ингибирующие или психологические эффекты, обусловленные информационными кампаниями, проводимыми в популяции.

Система (1) при любых значениях параметров имеет положение равновесия

$$Q_0 = (S_0, 0, 0, V_0), \quad S_0 \equiv \frac{a((1-p)d + \delta)}{d(d + \delta)}, \quad V_0 \equiv \frac{pa}{d + \delta},$$

которое соответствует отсутствию заболевших в популяции.

Система (1) допускает биологически возможную область

$$\mathcal{D} = \{(S, E, I, V) \in \mathbb{R}_+^4 : S \leq S_0, V \leq V_0, E \leq S_0 + V_0, I \leq S_0 + V_0, S + E + I + V \leq a/d\},$$

являющуюся положительно инвариантной. Введем контрольное репродуктивное число, зависящее от параметров модели:

$$R_c := \frac{\varepsilon S_0 \varphi'(0)}{(d + \tau)(d + \epsilon + \eta)}.$$

Определение. Положение равновесия x^* называется:

— *асимптотически устойчивым*, если все начинающиеся достаточно близко к нему решения, не только всё время остаются вблизи x^* , но и стремятся к нему при неограниченном росте времени;

— *глобально асимптотичным*, если каждое решение, независимо от начального условия, стремится к x^* при неограниченном росте времени.

Теорема 1. *Положение равновесия Q_0 системы (1) является глобально асимптотичным при $R_c \leq 1$ и неустойчивым при $R_c > 1$.*

Теорема 2. *Если $R_c > 1$, то система (1) в области $\mathcal{D}$ еще одно отличное от Q_0 положение равновесия Q^* , которое асимптотически устойчиво.*