

**Строение конечных групп, некоторые системы подгрупп которых
удовлетворяют условиям обобщённой полумодулярности**

Научный руководитель – Титов Георгий Николаевич

Цыбин Игорь Андреевич

Студент (магистр)

Кубанский государственный университет, Факультет математики и компьютерных наук,
Краснодар, Россия

E-mail: igor.trysin@gmail.com

Пусть L — конечная решётка с частичным порядком « $\leq$ », $x, y \in L$ и $x \leq y$. Согласно [3] через $d(y : x)$ обозначаем наибольшую длину среди длин всех максимальных цепей от y до x . Если 0 и 1 — соответственно минимальный и максимальный элементы решётки L , то число $d(1 : 0)$ называем размерностью решётки L . При $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ решётку L называем k -верхне (k -нижне) полумодулярной если для любых элементов $a, b \in L$ имеет место неравенство $d(a \vee b : b) \leq d(a : a \wedge b) + k$ ($d(a : a \wedge b) \leq d(a \vee b : b) + k$). Через $\mathbb{M}^k$ и $\mathbb{M}_k$ обозначаем классы конечных k -верхне полумодулярных и k -нижне полумодулярных решёток соответственно.

Подмножество множества элементов конечной решётки L с частичным порядком « $\leq$ », которое относительно « $\leq$ » само образует решётку, называем s -подрешёткой решётки L [1]. Если $\mathbb{X}$ — некоторый класс конечных решёток, то через $s\mathbb{X}$ обозначаем класс конечных решёток, у которых все s -подрешётки принадлежат классу $\mathbb{X}$, а через $gs\mathbb{X}$ — класс конечных групп, решётки подгрупп которых принадлежат классу $\mathbb{X}$. В частности, $gs\mathbb{X}$ — класс конечных групп, решётки подгрупп которых принадлежат классу $s\mathbb{X}$, то есть класс конечных групп, все s -подрешётки решёток подгрупп которых принадлежат классу $\mathbb{X}$ [2].

В классе конечных групп ($\mathbb{K}$) рассмотрим подклассы: класс абелевых групп ($\mathbb{A}$), класс нильпотентных групп ($\mathbb{H}$), класс сверхразрешимых групп ($\mathbb{C}$), класс разрешимых групп ($\mathbb{P}$). Понятно, что имеют место следующие включения $\mathbb{A} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{K}$. В [2] было доказано следующее утверждение: в каждом из классов $\mathbb{A}, \mathbb{H} \setminus \mathbb{A}, \mathbb{C} \setminus \mathbb{H}$ и $\mathbb{P} \setminus \mathbb{C}$ можно найти группу, принадлежащую классу $gs\mathbb{M}^1 \setminus gs\mathbb{M}^0$, но в классе $\mathbb{K} \setminus \mathbb{P}$ такой группы не существует. В связи с этим представляет интерес следующий вопрос: при каких условиях, накладываемых на конечную группу G , она будет принадлежать классу $gs\mathbb{M}^k \setminus gs\mathbb{M}^{k-1}$ при $k \in \mathbb{N}$? В случае, когда группа G является разрешимой, ответ на этот вопрос можно получить из следующей теоремы.

Теорема. Пусть G — конечная группа и $k \in \mathbb{N}$.

- а) Если G примарна, то $G \in gs\mathbb{M}^k \setminus gs\mathbb{M}^{k-1}$ тогда и только тогда, когда она является обобщённой группой кватернионов порядка 2^{k+3} либо группой порядка p^{k+2} , содержащей более одной подгруппы порядка p , для некоторого простого числа p .
- б) Если G непримарная разрешимая группа, то $G \in gs\mathbb{M}^k \setminus gs\mathbb{M}^{k-1}$ тогда и только тогда, когда размерность решётки $L(G)$ равна $k + 2$.

Источники и литература

- 1) Гиталенко Е. В., Титов Г. Н. Конечные группы с заданными свойствами s -подрешёток решетки подгрупп // Алгебра и приложения: сборник научных трудов / под редакцией А. В. Лежнева; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кубанский государственный университет. — Краснодар: Кубанский гос. университет, 2022. С. 9-14.

- 2) Гиталенко Е. В., Титов Г. Н. Обобщённая полумодулярность s -подрешёток конечных решёток и решёток подгрупп конечных групп // Алгебра и приложения: сборник научных трудов / под редакцией А. В. Лежнева; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кубанский государственный университет. — Краснодар: Кубанский гос. университет, 2023. С. 4-16.
- 3) Титов Г. Н. О разрешимости обобщённо полумодулярных конечных групп. Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. Т. 7, №1. С. 66-69.