

Граф коммутативности вещественной алгебры Окубо

Научный руководитель – Жилина Светлана Александровна

Павлинов Данил Андреевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: *danil.pavlinov@math.msu.ru*

В алгебре комплексных матриц размера 3×3 рассмотрим вещественное векторное подпространство $A = \{X \mid X \in M_3(\mathbb{C}), X^* = X, \text{Tr}(X) = 0\}$, где X^* обозначает эрмитово сопряжение. Для любых $X, Y \in A$ определим неассоциативное произведение

$$X * Y = \mu XY + \nu YX - \frac{1}{3} \text{Tr}(XY)E,$$

где $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ таковы, что $3\mu\nu = \mu + \nu = 1$. Тогда A является восьмимерной вещественной алгеброй относительно произведения $X * Y$ (см. [4]) и называется *вещественной алгеброй Окубо*. Обозначим ее через $\overline{P}_8$. Наравне с формами пара-гурвицевых алгебр, алгебры Окубо над произвольным полем составляют класс эластичных симметрических композиционных алгебр, который активно изучался в работах [2], [3].

Особый интерес для изучения представляют графы коммутативности различных алгебраических структур, в частности, неассоциативных алгебр. Они определяются следующим образом:

Графом коммутативности $\Gamma_C(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ называют граф, множеством вершин которого является $\mathbb{P}(\mathcal{A}/C_{\mathcal{A}}) = \{[a + C_{\mathcal{A}}] = \mathbb{F}a + C_{\mathcal{A}} \mid a \in \mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}\}$, причем различные вершины $[a + C_{\mathcal{A}}]$ и $[b + C_{\mathcal{A}}]$ соединены ребром, если и только если $ab = ba$.

Целью данной работы является описание явного вида компонент связности графа коммутативности $\overline{P}_8$ и нахождение их диаметров. Основной результат представлен в следующей теореме:

Теорема 1. *Граф $\Gamma_C(\overline{P}_8)$ связан, и его диаметр равен 4.*

Доказательство этой теоремы опирается на две леммы:

Лемма 1. *Любой ненулевой элемент $\overline{P}_8$ можно соединить ребром с идемпотентом.*

Лемма 2. *Расстояние между любыми двумя ненулевыми идемпотентными элементами $\overline{P}_8$ не превосходит двух.*

В доказательстве леммы 2 ключевую роль сыграли методы, изложенные в работе [1].

Источники и литература

- 1) G. Dolinar, B. Kuzma, P. Oblak, *On maximal distances in a commuting graph*, Electronic Journal of Linear Algebra, 23:243-256 (2012).
- 2) A. Elduque, H. Ch. Myung, *Flexible composition algebras and Okubo algebras*, Communications in Algebra, 19(4): 1197–1227 (1991).
- 3) A. Elduque, H. Ch. Myung, *On flexible composition algebras*, Communications in Algebra, 21(7): 2481–2505 (1993).
- 4) S. Okubo, *Pseudo-quaternion and pseudo-octonion algebras*, Hadronic Journal, 1(4): 1250–1278 (1978).