

О множествах натуральных чисел, замощающих натуральный ряд

Научный руководитель – Пентус Мати Рейнович

Холодильов Филипп Дмитриевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории
алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: f.kholodilov@gmail.com

Множество натуральных чисел A способно замостить (или факторизует) натуральный ряд $\mathbb{N}$, если найдётся такое множество натуральных чисел B , что каждое натуральное число можно единственным образом представить в виде суммы $a + b$, где $a \in A$ и $b \in B$. Такие множества частично затрагивал в своих исследованиях Д. Хайош [3], который изучал аналогичную задачу для абелевых групп. В работе [1] приводится неявная характеристика всех таких множеств, выраженная в терминах префиксных последовательностей формальных языков.

В рамках данного доклада будет предложено явное описание всех таких множеств с помощью последовательностей натуральных чисел. Ключевую роль в этом описании играет понятие смешанных систем исчисления, введённое Г. Кантором [2]. В таких системах каждому разряду в качестве основания сопоставляется своё число, а задаются эти системы последовательностями натуральных чисел (конечными или бесконечными).

Теорема 1. Множество A способно замостить $\mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда найдётся смешанная система исчисления $\mathbf{g}$, для которой будет выполнено одно из двух условий:

1. A состоит из тех и только тех натуральных чисел, представления которых в $\mathbf{g}$ имеют нули во всех чётных разрядах.
2. A состоит из тех и только тех натуральных чисел, представления которых в $\mathbf{g}$ имеют нули во всех нечётных разрядах.

Источники и литература

- 1) M. Anselmo, C. De Felice, A. Restivo, On some factorization problems // Bull. Belgian Math. Soc., 4, 1997. 25–43.
- 2) G. Cantor, Über die einfachen Zahlensysteme // Zeitschrift für Mathematik und Physik 14, 1869. 121–128.
- 3) G. Hajós, Sur la factorisation des groupes abéliens // Casopis Pest. Mat. Fys. 74, 1950. 157–162.