Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Построение трёхмерного представления тройного накрытия A_6

Научный руководитель – Чубаров Игорь Андреевич

Мартиросов Артём Каренович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия

E-mail: ar.martirosov2011@yandex.ru

Накрытием группы G называется группа $\tilde{G}$, в которой существует подгруппа Z, содержащаяся в $Z(G) \cap G'$, такая, что $\tilde{G}/Z \cong G$. Известно, что любое накрытие конечной группы конечно, причём существует некоторое накрытие наибольшего порядка. Соответствующая подгруппа Z определена однозначно с точностью до изоморфизма и называется *мультипликатором Шура* группы G. Если при этом $G' = G$, то наибольшая группа $\tilde{G}$ также определена однозначно с точностью до изоморфизма.

Хорошо известен следующий результат [1]: мультипликатор Шура группы A_n имеет порядок 2 при $n \geqslant 4$, $n \neq 6, 7$, а мультипликатор Шура групп A_6, A_7 циклический порядка 6. В данной работе приведено построение комплексного представления тройного накрытия группы A_6 (то есть накрытия $\tilde{G}$, в котором $|Z| = 3$) в наименьшей возможности размерности – в размерности 3. Построение опирается на изучение некоторой решётки в $\mathbb{C}^3$ над кольцом целых алгебраических чисел поля $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}, \sqrt{5}]$: группой автоморфизмов этой решётки оказывается группа $2 \times 3{\cdot}A_6$.

Это построение приводят к изящному построению тройного накрытия группы $\operatorname{Aut} A_6$, имеющей строение $A_6.2^2$. А именно, каждая из групп $\operatorname{Gal} \mathbb{Q}[\sqrt{-3}, \sqrt{5}]$, $\operatorname{Out} A_6$ изоморфна 2×2, и к построенной группе $3{\cdot}A_6$ можно определённым образом присоединить все три внешних автоморфизма группы A_6, получив искомое накрытие $3{\cdot}\operatorname{Aut} A_6$ (которое, в действительности, не будет накрытием в описанном выше смысле, поскольку нормальная подгруппа порядка 3 уже не будет центральной).

Кроме того, исследование некоторых факторрешёток упомянутой решётки приводит к вложениям $A_6 \hookrightarrow \mathrm{L}_3(4)$ и $M_{10} \hookrightarrow \mathrm{U}_3(5)$. Оба вложения довольно трудно получить элементарными средствами. Образы этих вложений оказываются максимальными подгруппами в соответствующих группах.

Источники и литература

1) Атлас простых групп [Электронный ресурс] URL: https://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/ (дата обращения: 03.03.25).