Секция «Прикладная механика и управление»

Задача о выборе места посадки с минимальным расходом топлива

Научный руководитель – Черкасов Олег Юрьевич

Орёл Никита Андреевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра прикладной механики и управления,
Москва, Россия
E-mail: nikita.orel@math.msu.ru

В работе рассматривается обобщение задачи [1] о выборе места посадки над поверхностью планеты летательного аппарата с поворотным двигателем. Движение происходит в среде с сопротивлением. Следуя [2], [3] будем считать, что изменение количества топлива не влияет на динамику точки.

Уравнения движения имеют вид (см. рис.):

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau} = V, \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\tau} = cU - F\left(V\right), \quad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\tau} = -\sqrt{U^2 + \frac{m_a^2 \cdot g^2}{c^2}},$$

где X – горизонтальная координата, V – скорость, c – скорость истечения массы, U – скорость расхода массы, управление, $U \in \left[-\bar{U}, \bar{U}\right]$, где $\bar{U}$ – заданная константа, $\bar{U} > 0$, $F(V)$ – сопротивление среды, g – ускорение свободного падения, M – масса топлива, m_a – масса аппарата, τ – размерное время.

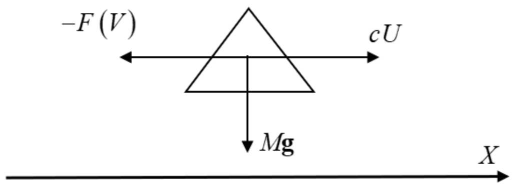

Рис. : К постановке задаче о выборе места посадки

После обезразмеривания уравнения движения примут вид

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = u - f\left(v\right), \quad \dot{m} = -\sqrt{1+u^2}. \tag{1}$$

Управление u удовлетворяет ограничению $|u| \leqslant \bar{u}$, где $\bar{u} > 0$.

Начальные и конечные условия для системы (1) имеют вид

$$x\left(0\right) = x_0, \quad v\left(0\right) = v_0, \quad m(0) = m_0, \quad x\left(T\right) = x_1, \quad v(T) = v_1. \tag{2}$$

Время процесса T фиксировано. Целью управления является минимизация терминального функционала

$$J = -m\left(T\right) \to \min_{|u| \leqslant \bar{u}}. \tag{3}$$

С использованием принципа максимума Понтрягина [4] задача оптимального управления (1) – (3) была сведена к краевой для системы нелинейных дифференциальных уравнений (в случае, когда $-\bar{u} < u(t) < \bar{u}$) :

$$\begin{cases} \dot{x} = v,\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_1, \\ \dot{m} = -\sqrt{1+u^2},\ m(0) = m_0, \\ \dot{v} = u - f(v),\ v(0) = v_0,\ v(T) = v_1, \\ \dot{u} = (1+u^2)\left(uf'(v) - a\sqrt{1+u^2}\right),\ u(T) = \dfrac{b}{\sqrt{1-b^2}}. \end{cases} \tag{4}$$

Требуется найти неизвестные значения $u(0)$, a и b. Первые два уравнения системы (4) отщепляются от системы (4). Будем исследовать подсистему, состоящую из третьего и четвертого уравнений системы (4):

$$\begin{cases} \dot{v} = u - f(v),\ v(0) = v_0,\ v(T) = v_1, \\ \dot{u} = (1+u^2)\left(uf'(v) - a\sqrt{1+u^2}\right),\ u(T) = \dfrac{b}{\sqrt{1-b^2}}. \end{cases} \tag{5}$$

После того, как $v(t)$ и $u(t)$ определены из (5), $x(t)$ находится из первого уравнения (4) с помощью квадратур.

Для случая квадратичного сопротивления среды ($f(v) = v^2$) проведено качественное исследование системы (5) методом фазовой плоскости. Установлено, что система имеет единственное стационарное решение типа «седло». С использованием первого интеграла $H = C$, где H – функция Понтрягина оптимальной задачи (1) – (3):

$$H = av + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \left(u - v^2\right) - \sqrt{1+u^2}. \tag{6}$$

по аналогии с работами [5], [6] установлено число выходов оптимальной траектории на ограничение $u = \bar{u}$ в случае свободной конечной скорости ($b = 0$) и на ограничения $u = \pm\bar{u}$ в случае фиксированной конечной скорости $v(T) = v_1$. Аналитически описаны области в плоскости фазовых переменных, из которых возможно достижение терминального множества. Построен синтез оптимального управления. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы численным моделированием.

Список литературы

[1] *Cheng R.K., Conrad D.A.* Optimal Translation and Brachistochrone //Aerospace Sciences Meeting. 1964. V. 49.

[2] *Keller W.F.* Study of spacecraft hover and translation modes above the lunar surface //J. of Spacecraft and Rockets. 1965. V. 5. № 2. P. 426-430.

[3] *Speyer J.L., Bryson A.J.* Explicit guidance law for minimum fuel horizontal translation with bounded control //Journal AAIA. 1967. V.5. № 2. P. 340-342.

[4] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.

[5] *Cherkasov O.Yu., Smirnova N.V.* On the Brachistochrone Problem with State Constraints on the Slope Angle//Intern. J. Non-Linear Mech. 2022. V. 139.

[6] *Смирнова Н.В.* Модифицированная задача о брахистохроне с фазовыми ограничениями и тягой. // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2023. №4. С. 54-60.