

О предельном поведении дробной части сверток случайных величин с распределением Коши

Научный руководитель – Кондратенко Александр Евгеньевич

Октысюк Ксения Дмитриевна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: kseniia.oktysuk@math.msu.ru

Задачи о предельном поведении сверток случайных величин - одни из важнейших в теории вероятностей. Уже не первый век они не теряют своей актуальности, ведь мы до сих пор не можем сказать, что эта тема до конца изучена. Влияние основных результатов, касающихся предельного поведения сверток, закона больших чисел и центральной предельной теоремы, ощущается далеко за пределами математики. Одно из направлений работы по дальнейшему изучению свойств сверток при увеличении числа случайных величин заключается в исследовании поведения дробных частей сверток и их предельных свойств. На идею о том, что же происходит в пределе с дробной частью свертки, наталкивает дискретный случай. Рассмотрим случайную величину ξ , имеющую распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.

$$\xi \sim \frac{0}{1-p} \bigg| \frac{1}{p}$$

Переобозначим p следующим образом: $p = \frac{1-s}{2}$, где $s \in (0, 1)$. Тогда распределение ξ запишется в виде

$$\xi \sim \frac{0}{\frac{1+s}{2}} \bigg| \frac{1}{\frac{1-s}{2}}$$

Теперь рассмотрим независимые случайные величины ξ_1 и $\xi_2 \sim Be(p)$

$$\xi_1 + \xi_2 \sim \frac{0}{\frac{(1+s)^2}{4}} \bigg| \frac{1}{\frac{1-s^2}{2}} \bigg| \frac{2}{\frac{(1-s)^2}{4}}$$

Переходя к рассмотрению дробной части - $\{\xi_1 + \xi_2\}_2$ (в смысле [2]), получим

$$\{\xi_1 + \xi_2\}_2 \sim \frac{0}{\frac{1+s^2}{2}} \bigg| \frac{1}{\frac{1-s^2}{2}}$$

При такой записи несложно заметить, что распределение стало ближе к равномерному после применения дробной части. Теперь рассмотрим $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - независимые случайные величины $\sim Be(p)$.

$$\{\xi_1 + \dots + \xi_n\}_2 \sim \frac{0}{\frac{1+s^n}{2}} \bigg| \frac{1}{\frac{1-s^n}{2}}$$

Таким образом, дробная часть свертки бернуллиевских случайных величин с вероятностью успеха p экспоненциально быстро стремится к равномерному распределению. В работе [1] было доказано, что аналогичный результат имеет место для пуассоновских случайных величин. Оказалось, что возможно обобщение на случай абсолютно непрерывных случайных величин. Так в работах [3], [4] показано, что дробная часть свертки гауссовских

случайных величин сходится к равномерному на отрезке $[0, 1]$ распределению. В данной работе мы показали, что для случайных величин с распределением Коши описанная выше сходимостъ также имеет быть. Результат сформулирован как теорема:

Теорема

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, $\xi_k \sim Cauchy(a_k, b_k)$, $k = 1, 2, \dots$; $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ и $b_1 + b_2 + \dots + b_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\{S_n\} \xrightarrow{d} \eta, \eta \sim R[0, 1]$$

Результат для случайных величин со стандартным распределением Коши был представлен на XXXV Международной научно-практической конференции "Предотвращение. Спасение. Помощь."

Источники и литература

- 1) Кондратенко А. Е., Кондратенко Н. А., Соболев В. Н., Чернышова Д. А. О сходимости дробной части сверток пуассоновских случайных величин. // Теория вероятностей и ее применения. 2023. Т. 68 вып. 4. – С.846 – 847.
- 2) Кондратенко А. Е., Соболев В. Н. Обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части, максимизация энтропии дробной части свертки с равномерным распределением // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2022. — № 1. — С. 45–52.
- 3) Куликова А. А., Прохоров Ю. В. Распределение дробных долей случайных векторов: гауссовский случай. I // Теория вероятностей и ее применения. 2003. Т. 48, вып. 2. – С. 399 – 402.
- 4) Куликова А. А., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. Распределение дробных долей случайных векторов: гауссовский случай. II // Теория вероятностей и ее применения. 2005. Т. 50, вып. 4. – С. 776 – 778.