

Обобщение закона повторного логарифма для непрерывного по времени симметричного случайного блуждания по многомерной решетке

Научный руководитель – Яровая Елена Борисовна

Низамова Элина Ильсуровна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: elina.nizamova@math.msu.ru

Рассматривается непрерывное по времени случайное блуждание S_t по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. Предполагается, что это марковская цепь с матрицей переходных интенсивностей (генератором) случайного блуждания $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $a(x, y) \geq 0$ при $x \neq y$ и $a(x, x) < 0$,
- 2) $\sum_y a(x, y) = 0$,
- 3) симметричность: $a(x, y) = a(y, x)$,
- 4) пространственная однородность: $a(x, y) = a(0, y - x)$,
- 5) конечный момент порядка $2 + \epsilon$, $\epsilon > 0$, скачков: $-\frac{1}{a(0,0)} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |x|^{2+\epsilon} a(0, x) < \infty$.

Второй момент, домноженный на $-a(0, 0)$ обозначим за $\sigma^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} x^2 a(0, x)$.

- 6) неприводимость, то есть все точки $x \in \mathbb{Z}^d$ достижимы.

Через $p(t, x, y)$ обозначим переходную вероятность случайного блуждания, то есть вероятность того, что в момент $t \geq 0$ частица находится в точке y , при условии, что в момент $t = 0$ она находилась в точке x . Тогда асимптотически при $h \downarrow 0$ она с вероятностью $p(h, x, y) = a(x, y)h + o(h)$ при $y \neq x$, $p(h, x, x) = 1 + a(x, x)h + o(h)$.

- 7) однородность по времени: переходная вероятность за время $[s, t]$ совпадает с $p(t - s, x, y)$.

Более широкий класс блужданий, а именно с конечным вторым моментом, рассматривается в [2]. В представленной работе используется результат о сильной аппроксимации винеровским процессом, полученный в [3], где одним из условий является ограниченность момента порядка $2 + \epsilon$, вследствие чего сужается класс рассматриваемых блужданий.

Целью работы является обобщение результатов о функциональном законе повторного логарифма, полученных в [1], на непрерывные по времени случайные блуждания по решетке $\mathbb{Z}^d$.

Для формализации основного результата необходимо ввести следующие понятия и обозначения. Рассматривается произвольная неубывающая функция $\phi(t)$, $\phi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. В [1] вводятся функционал $I(\phi, r) = \int_1^\infty \frac{\phi(t)}{t} e^{-\frac{r\phi^2(t)}{2}} dt$ и число $R^2(\phi) = \inf\{r > 0 : I(\phi, r) < \infty\}$ ($R(\phi) = \infty$, если не существует такого конечного r , что $I(\phi, r) < \infty$).

Основной результат является обобщением теорем 1, 2, 4, 5 из [1]. Для заданного случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ выполнено соотношение

$$P(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t}{\sigma \sqrt{t\phi(t)}} = R(\phi)) = 1.$$

Отсюда, в частности, следует закон повторного логарифма, если за $\phi(t)$ принять функцию $\sqrt{2 \ln \ln t}$, что вытекает из анализа сходимости функционала $I(\phi, r)$.

Источники и литература

- 1) Булинский А. В. Новый вариант функционального закона повторного логарифма // Теория вероятн. и ее примен., 1980, том 25, выпуск 3, 502–512.
- 2) Яровая Е. Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде // Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. Москва. 2007.
- 3) Bashtova E., Shashkin A. Strong Gaussian approximation for commulative processes // Stochastic Processes and their Applications, v. 150, 2022, с. 1-18.