

Оценки параметра Харста фрактального броуновского движения, ключевые свойства и сравнение

Научный руководитель – Прохоров Александр Владимирович

Савицкий Александр Вадимович

Выпускник (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической статистики и
случайных процессов, Москва, Россия

E-mail: savid2000@mail.ru

Доклад посвящен задаче оценки показателя Харста фрактального броуновского движения. Впервые этот процесс был предложен А.Н.Колмогоровым в [1] с помощью инструментов корреляционной теории стационарных процессов, а затем Мандельброт и ван Несс в [2] в 1968 году предложили определение, использующее стохастическое интегральное представление. Сейчас этот процесс широко используется в построении различных моделей в гидрологии, финансах, экономике и т.д.

Оценка неизвестного параметра является классической задачей для случайных величин и процессов. Однако поиск оптимальных в некотором смысле оценок - сложная и нетривиальная задача ввиду наличия зависимостей между значениями случайных процессов в разные моменты времени.

Пусть $X_H(t)$ - стандартное фрактальное броуновское движение с показателем H . Рассмотрим отрезок $t \in [0, 1]$. Для всех $n > 2$ и $i = 1, \dots, n$ положим

$$X_{i,n} = X_H\left(\frac{i}{n}\right), \quad i = 1, \dots, n,$$

В докладе исследуется оценка, появившаяся в работе [4] без изучения свойств, и производится ее сравнение с оценкой из работы [3].

$$H_n^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln(R_n(1) + 1)}{\ln 2}, \quad H_n^2(\mathfrak{R}) = -\frac{\ln[\sqrt{\pi} S_n(\mathfrak{R}) / (2^{\mathfrak{R}/2} \Gamma(\frac{\mathfrak{R}+1}{2}))]}{\mathfrak{R} \ln(n-1)},$$

где $R_n(1) = \bar{r}_1$ - оценка коэффициента автокорреляции ρ_1 ,

$$S_n(\mathfrak{R}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |X_{i+1,n} - X_{i,n}|^{\mathfrak{R}},$$

$\mathfrak{R} > 0$ - произвольное вещественное положительное число.

Установлены следующие важные свойства:

- сходимости почти наверное
- сформулирована и доказана предельная теорема для изучаемых статистик.

Получены оценки на дисперсию статистик, произведено численное моделирование с целью практического подтверждения качества изученных статистик. Проведено сравнение с другими известными оценками, подтверждено, что изученные статистики обладают лучшими статистическими свойствами.

Источники и литература

- 1) А.Н.Колмогоров. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве. ДАН СССР, 1940, т.26, с.115-118; Избранные труды. Математика и механика. М.:Наука. 1985. С.274-277
- 2) Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications.//SIAM Review. 1968. V.10 №4. Pp. 422-437
- 3) Peltier R.F., Vehel J.Levy, A new methods for estimation parameters of fractional Brownian motion. Preprint №2396. November 1994.
- 4) Шурыгин, А. М. Статистика при подсчете запасов месторождений [Текст]. — Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 223 с., 3 л. граф., 3 отд. сброшюр. л. : ил. : 22 см.