

О центральной предельной теореме Добрушина для неоднородных цепей Маркова в схеме серий

Научный руководитель – Веретенников Александр Юрьевич

Нуриева Аиша Ильдаровна

Аспирант

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Факультет математики, Москва, Россия

E-mail: ai_nurieva@mail.ru

В докладе будет предложен новый вариант достаточного условия типа Добрушина в схеме серий для неоднородных цепей Маркова из достаточно широкого класса таких процессов. Само условие Добрушина может не выполняться, однако, ЦПТ при этом все же имеет место. Рассмотрим марковскую цепь с дискретным временем, не обязательно однородную.

Пусть $\pi = \pi_{i,i+1}(x, dy)$ – марковское переходное ядро на $(\mathbf{X}, \mathcal{B}(\mathbf{X}))$ в момент времени i , где $(\mathbf{X}, \mathcal{B}(\mathbf{X}))$ – заданное измеримое пространство с обычными требованиями на марковский процесс. Под неоднородной марковской цепью длины n на вероятностном пространстве $(\mathbf{X}, \mathcal{B}(\mathbf{X}))$ с переходной вероятностью $\{\pi_{i,i+1} = \pi_{i,i+1}(x, dy) : 1 \leq i \leq n-1\}$ имеется в виду марковский процесс на произведении пространств $(\mathbf{X}^n, \mathcal{B}(\mathbf{X}^n))$ с вероятностями перехода

$$P[X_{i+1} \in A | X_i = x] \stackrel{\text{п.н.}}{=} \pi_{i,i+1}(x, A),$$

где $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ – траектория процесса на отрезке времени $[1, n]$. В частности, при начальном распределении $X_1 \sim \mu$ распределение в момент $k \geq 2$ задается мерой $\mu\pi_{1,2}\pi_{2,3} \dots \pi_{k-1,k}$. При $i < j$ обозначим

$$\pi_{i,j} = \pi_{i,i+1}\pi_{i+1,i+2} \dots \pi_{j-1,j}.$$

Определим $\delta(\pi) = \sup_{x_1, x_2 \in \mathbf{X}} \|\pi(x_1, \cdot) - \pi(x_2, \cdot)\|_{Var}$ и $\alpha(\pi) := 1 - \delta(\pi)$. Положим $\alpha_n = \min_{1 \leq i \leq n-1} \alpha(\pi_{i,i+1}^{(n)})$, $\alpha_n^{(2)} = \min_{1 \leq i \leq n-2} \alpha(\pi_{i,i+2}^{(n)})$. Далее, пусть $\{f_i^{(n)} : \mathbf{X} \mapsto \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ – вещественные функции на $\mathbf{X}$. Для каждого $n \geq 1$ положим $S_n := \sum_{i=1}^n f_i^{(n)}(X_i^{(n)})$. Следующая теорема является основным результатом.

Теорема 1. Пусть при всяком n

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{x \in \mathbf{X}} |f_i^{(n)}(x)| \leq C_n < \infty.$$

Тогда, если выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^2 \alpha_n^{-1} (\alpha_n^{(2)})^{-2} \left[\sum_{i=1}^n D(f_i^{(n)}(X_i^{(n)})) \right]^{-1} = 0, \quad (1)$$

то имеет место ЦПТ в схеме серий

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} \Rightarrow N(0, 1). \quad (2)$$

Теорема будет дополнена некоторыми примерами.

Источники и литература

- 1) Р.Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, I,II, Теория вероятн. и ее применен., 1956, 1(1), 72–89, & 1956, 1(4), 365–425. [htt](#)
- 2) S. Sethuraman, S.R.S. Varadhan, A Martingale Proof of Dobrushin's Theorem for Non-Homogeneous Markov Chains. Electron. J. Probab. 2005, 10, 1221 - 1235. <https://doi.org/10.1214/EJP.v10-283>
- 3) P. Hall, C.C. Heyde, Martingale Limit Theory and Its Application. Academic Press, New York, 1980. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-10818-5>