

Численный анализ моделей систем взаимодействующих частиц

Научный руководитель – Яровая Елена Борисовна

Чэнь Яньцзе

Студент (магистр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: 1094818570@qq.com

В данной работе рассматриваются модели ветвящихся случайных блужданий (ВСБ)[1] с одним типом частиц в двух вариантах: без взаимодействия и с учётом взаимодействий между агентами. Исследование основано на классических предположениях о непрерывности времени, дискретности численности, однородности среды и независимости событий в случае отсутствия взаимодействий[2]. В качестве дополнительного начального условия предполагается, что в момент времени $t = 0$ каждая точка исследуемой однородной среды обязательно содержит по одной частице, что обеспечивает равномерное распределение начальной популяции и устраняет влияние локальных неоднородностей на эволюцию системы.

Процессы ветвления (с интенсивностью λ) и естественной гибели (с интенсивностью μ) задают динамику популяции, что отражается в эволюции вероятностной производящей функции

$$G(s, t) = \sum_{N=0}^{\infty} P(N, t) s^N.$$

При переходе к модели с взаимодействием вводятся дополнительные реакции, описывающие изменение числа агентов в результате столкновений, приводящих к увеличению или уменьшению популяции. В этом случае полученное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial G(s, t)}{\partial t} = \lambda \frac{(s-1)}{2} G''_s(s, t) - \mu(s-1) G'_s(s, t).$$

Анализ первого момента $E[N(t)] = G'_s(1, t)$ приводит к нелинейному уравнению[3]

$$\frac{dE[N(t)]}{dt} = \frac{\lambda}{2} E[N(t)]^2 - \mu E[N(t)],$$

решение которого, с учётом малых флуктуаций ($E[N(N-1)] \approx E[N(t)]^2$), даёт эксплицитное выражение для $E[N(t)]$ и стационарное решение

$$E[N^*] = \frac{2\mu}{\lambda}.$$

Полученные результаты позволяют выявить эффекты, которые возникают в системах с взаимодействием частиц.

Источники и литература

- 1) Е. Б. Яровая. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. Москва. 2007.
- 2) A. V. Kalinkin. Markov branching processes with interaction. Russian Mathematical Surveys. 57:2 2002. p. 241–304.
- 3) T. M. Liggett. Interacting Particle Systems. Springer. New York. 1985.