

Ценообразование барьерных опционов в модели диффузионного процесса с помощью локального времени

Научный руководитель – Павлов Игорь Викторович

Шин Владимир Юрьевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: mr.shin2001@yandex.ru

В данной работе рассматривается задача вычисления цены барьерного опциона, а именно, «down-and-out call» опциона в модели геометрического броуновского движения с коэффициентами, зависящими только от времени.

По определению, «down-and-out call» опцион есть производный финансовый инструмент, выплата по которому равна выплате по классическому опциону «call» с моментом погашения T и ценой исполнения K и который прекращает свое существование (аннулируется), если цена базового актива достигает определённого барьерного уровня H .

Модель предполагает, что на вероятностном пространстве $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, Q)$ с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, удовлетворяющей обычным условиям, динамика базового актива X описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = r(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dW_t, \quad X_0 = x, \quad (1)$$

где W — это Q -стандартное броуновское движение, согласованное с $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$. При этом детерминированные функции $r(t)$ и $\sigma(t)$ удовлетворяют условиям существования и единственности сильного решения X_t .

Из теории безарбитражного ценообразования известно, что цена данного опциона вычисляется как

$$V(t, x) = E^Q[e^{-\int_t^T r(s)ds} (X_T - K)^+ I_{\{m_{t,T} > H\}} \mid X_t = x], \quad (2)$$

где $m_{t,T} = \min_{t \leq s \leq T} X_s$.

Основной результат данной работы связан с применением метода вычисления цены барьерного опциона с помощью формулы Пешкира замены переменных с использованием локального времени [1]:

Теорема. Цена (2) барьерного опциона «down-and-out call» в модели (1) в момент $t \in [0, T]$ вычисляется по формуле

$$V(t, x) = C(t, x) - \frac{1}{2} \int_t^T e^{-\int_t^u r(s)ds} V_x(u, H+) \mathcal{K}(t, x; u) du, \quad (3)$$

где $C(t, x)$ есть цена «call» опциона в данной модели

$$C(t, x) = x\Phi(d_1(t, x; T, K)) - Ke^{-\int_t^T r(s)ds}\Phi(d_2(t, x; T, K)), \quad (4)$$

где

$$d_1(t, x; T, K) = \frac{\ln \frac{x}{K} + \int_t^T r(s)ds + \frac{1}{2}v^2(t, T)}{v(t, T)}, \quad (5)$$

$$d_2(t, x; T, K) = d_1(t, x; T, K) - v(t, T), \quad (6)$$

$$v(t, T)^2 = \int_t^T \sigma^2(s)ds, \quad (7)$$

а $V_x(u, H+)$ удовлетворяет уравнению Вольтерра I-го рода

$$C(t, H) = \frac{1}{2} \int_t^T e^{-\int_t^u r(s) ds} V_x(u, H+) \mathcal{K}(t, x; u) du \quad (8)$$

с ядром

$$\mathcal{K}(t, x; u) = \phi(d_2(t, x; u, H)) \frac{\sigma(u)^2 H}{v(t, u)}. \quad (9)$$

Источники и литература

- 1) G. Peskir. A change-of-variable formula with local time on curves. Journal of Theoretical Probability, 18:499–535, 2005