Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Мартингальная задача Бенаму-Бренье в условиях моментных ограничений

Научный руководитель – Гущин Александр Александрович

Новикова Александра Валерьевна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: alexandranovikova-98@yandex.ru

Задача оптимального транспорта со времён появления первых постановок Монжа и Канторовича претерпела большое число модификаций, породив отдельные направления в различных сферах (математика, физика, финансы, машинное обучение). Одним из популярных сужений данной задачи является *мартингальный оптимальный транспорт*, в частности, мартингальная задача Бенаму-Бренье:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 ||\sigma_t - \mathrm{Id}||^2 dt\right] \to \inf_{\substack{M_t = M_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s \\ M_0 \sim \mu,\, M_1 \sim \nu}} \tag{1}$$

для маргинальных распределений μ и ν в моменты 0 и 1, находящихся в отношении выпуклого порядка. Таким образом, задача заключается в поиске мартингала, отвечающего условиям на начальное и конечное по времени распределение, максимально приближённого к броуновскому движению.

В [2] было представлено подробное исследование структуры решения задачи и предложен метод восстановления соответствующего мартингала, благодаря эквивалентной связи (1) с задачей *слабого мартингального оптимального транспорта*:

$$\int \mathcal{W}_2(\pi^x, \gamma)^2 \mu(dx) \to \inf_{\substack{\{\pi^x\}_x,\, \int y\, \pi^x(dy) = x \\ \int \mu(dx)\pi^x(dy) = \nu(dy)}}, \tag{2}$$

где $\mathcal{W}_2$ – метрика Канторовича, γ – стандартная гауссовская мера, а $\{\pi^x\}_x$ – семейство условных переходных мер с фиксированными начальными координатами.

Задачи такого типа актуальны для калибровки финансовых моделей. Проблема практической применимости заключается в отсутствии информации, как минимум, о конечном распределении ν. Для её решения появилось другое направление в транспортных задачах – *оптимальный транспорт с моментными ограничениями*, см. [1].

Наш интерес состоит в объединении этих задач, и цель данной работы состоит в изучении решений задачи слабого мартингального оптимального транспорта в условиях моментных ограничений:

$$\int \mathcal{W}_2(\pi^x, \gamma)^2 \mu(dx) \to \inf_S, \tag{3}$$

$$S = \left\{\pi \in \Pi_{\mathcal{M}}(\mu) : \int f_i(y)\, \pi(dx, dy) = c_i,\ i = \overline{1, N}\right\}, \tag{4}$$

где $\Pi_{\mathcal{M}}(\mu)$ – пространство вероятностных мартингальных мер на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с первым маргиналом μ, f_i – некоторые функции, в частности, функции выплат по простому опциону на покупку по цене K_i: $f_i(y) = (y - K_i)^+$.

Источники и литература

1) A. Alfonsi, R. Coyaud, V. Ehrlacher, D. Lombardi. Approximation of Optimal Transport Problems with Marginal Moments Constraints, *Mathematics of Computation*, 2020
2) J. Backhoff-Veraguas, M. Beiglböck, M. Huesmann, S. Källblad. Martingale Benamou-Brenier: A probabilistic perspective, *The Annals of Probability, Vol. 48, pp. 2258-2289*, 2020