Универсиада по эконометрике 2025
Решения задач второго тура

Задача 1. (25 баллов)

1

Отметим, что здесь приводится один из вариантов решения задачи в терминах «потенциальных исходов», т.е. двух альтернативных ситуаций, если бы станция метро была построена и если бы не была построена. Решение задачи таких пояснений именно в этих терминах не требовало. Итак, из условия можно заключить, что потенциальные исходы Y_{it} имеют вид

$$Y_{it} = \alpha_i + \overbrace{\sum_{j \neq i} \gamma_{ijt} W_j}^{=0} + \gamma_{iit} W_i + \varepsilon_{it} = \alpha_i + \gamma_{iit} W_i + \varepsilon_{it}$$

В частности, поскольку $\gamma_{ii,2023} = 0$, имеем

$$\begin{array}{lllll} \text{Control } (W_i = 0): & Y_{i,2024}(0) = \alpha_i + \varepsilon_{i,2024} & \text{и} & Y_{i,2023}(0) = \alpha_i + \varepsilon_{i,2023} \\ \text{Treatment } (W_i = 1): & Y_{i,2024}(1) = \alpha_i + \gamma_{ii,2024} + \varepsilon_{i,2024} & \text{и} & Y_{i,2024}(1) = \alpha_i + \varepsilon_{i,2023} \end{array}$$

Тогда исследуемый оценщик фактически принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{\text{простое}} &= \frac{2}{n} \sum_{i\,:\,W_i=1} (Y_{i,2024} - Y_{i,2023}) - \frac{2}{n} \sum_{i\,:\,W_i=0} (Y_{i,2024} - Y_{i,2023}) = \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i\,:\,W_i=1} (\gamma_{ii,2024} + \varepsilon_{i,2024} - \varepsilon_{i,2023}) - \frac{2}{n} \sum_{i\,:\,W_i=0} (\varepsilon_{i,2024} - \varepsilon_{i,2023}) = \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} W_i \left(\gamma_{ii,2024} + \varepsilon_{i,2024} - \varepsilon_{i,2023}\right) - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 - W_i) \left(\varepsilon_{i,2024} - \varepsilon_{i,2023}\right) \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим математическое ожидание этой оценки с учетом некоррелированности W_i и ε_{it}:

- $\mathbb{E}\left(W_i\left(\gamma_{ii,2024}+\varepsilon_{i,2024}-\varepsilon_{i,2023}\right)\right)=\frac{1}{2}\gamma_{ii,2024}$
- $\mathbb{E}\left(\left(1-W_i\right)\left(\varepsilon_{i,2024}-\varepsilon_{i,2023}\right)\right)=0$

Из этих соображений получаем

$$\mathbb{E}\,\hat{\tau}_{\text{простое}}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_{ii,2024}}{2}+0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ii,2024}\qquad\text{(7 баллов)}$$

Альтернативно можно было бы узнать в предлагаемой оценке метод разности разностей (англ. *Difference–in–Differences*) и сослаться на известный факт о несмещенности такой оценки в данных условиях.

Интерпретация оценки здесь такова: $\tau_{\text{простое}}$ – это средняя экономия времени в пути, какой бы она была, если бы изначально у типичного жителя Москвы не было доступной станции метро поблизости, а затем она появилась бы в 15 минутах от дома *у каждого москвича*. Иными словами, если бы у каждого жителя Москвы в 15 минутах ходьбы от дома появилась новая станция метро, то *в отсутствие косвенных эффектов* его среднее время на дорогу сократилось бы на $\tau_{\text{простое}}$ минут в неделю (2 балла).

Можно также заметить, что матожидание второй суммы в предлагаемой оценке равно нулю, поэтому в качестве несмещенной оценки нужного эффекта годится даже

$$\hat{\tau}_{\text{очень простое}}=\frac{2}{n}\sum_{i\,:\,W_i=1}\left(Y_{i,2024}-Y_{i,2023}\right)$$

Эта оценка также несмещена, как показывают приведенные выше рассуждения, однако может обладать меньшей дисперсией, чем $\hat{\tau}_{\text{простое}}$, которая фактически представляет собой $\hat{\tau}_{\text{очень простое}}$ плюс в среднем нулевой шум средней разности в контрольной группе.

2

Повторяя шаги из предыдущего рассуждения для ситуации, когда $\gamma_{ijt}\neq 0$ при $i\neq j$, получаем

$$Y_{it}=\alpha_i+\sum_{j\neq i}\gamma_{ijt}W_j+\gamma_{iit}W_i+\varepsilon_{it}$$

$$\text{Control}: \quad Y_{i,2024}(0) = \alpha_i + \sum_{j\neq i} \gamma_{ij,2024} W_j + \varepsilon_{i,2024} \quad \text{и} \quad Y_{i,2023}(0) = \alpha_i + \varepsilon_{i,2023}$$

$$\text{Treatment}: \quad Y_{i,2024}(1) = \alpha_i + \sum_{j\neq i} \gamma_{ij,2024} W_j + \gamma_{ii,2024} + \varepsilon_{i,2024} \quad \text{и} \quad Y_{i,2024}(1) = \alpha_i + \varepsilon_{i,2023}$$

Тогда будем иметь следующую структуру сумм в оценке $\hat{\tau}_{\text{простое}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n}\sum_{i\,:\,W_i=1}(Y_{i,2024}-Y_{i,2023}) &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i \left(\gamma_{ii,2024} + \sum_{j\neq i}\gamma_{ij,2024}W_j + \varepsilon_{i,2024} - \varepsilon_{i,2023}\right) = \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i \left(\gamma_{ii,2024} + \varepsilon_{i,2024} - \varepsilon_{i,2023}\right) + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\gamma_{ij,2024}W_iW_j \\
\frac{2}{n}\sum_{i\,:\,W_i=0}(Y_{i,2024}-Y_{i,2023}) &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-W_i)\left(\sum_{j\neq i}\gamma_{ij,2024}W_j + \varepsilon_{i,2024} - \varepsilon_{i,2023}\right) = \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-W_i)\left(\varepsilon_{i,2024} - \varepsilon_{i,2023}\right) + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\gamma_{ij,2024}(1-W_i)W_j
\end{aligned}$$

В таком случае математические ожидания соответствующих сумм равны:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{2}{n}\sum_{i\,:\,W_i=1}(Y_{i,2024}-Y_{i,2023})\right] &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\gamma_{ii,2024} + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{1}{4}\gamma_{ij,2024} \\
\mathbb{E}\left[\frac{2}{n}\sum_{i\,:\,W_i=0}(Y_{i,2024}-Y_{i,2023})\right] &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{1}{4}\gamma_{ij,2024}
\end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{E}\,\hat{\tau}_{\text{простое}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ii,2024} + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\gamma_{ij,2024}\right) - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\gamma_{ij,2024} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ii,2024}$$

Поскольку в общем случае $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_{ii,2024} \neq \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{ij,2024}$, то оценка $\hat{\tau}_{\text{простое}}$, вообще говоря, смещена (7 баллов).

Альтернативно можно было бы вновь вспомнить связь с методом разности разностей. Тогда можно заметить, что

$$Y_{i,2024} - Y_{i,2023} = \gamma_{ii,2024}W_i + \sum_{j\neq i}\gamma_{ij,2024}W_j + \varepsilon_{i,2024} - \varepsilon_{i,2023}$$

Отсюда получаем, что

- $\mathbb{E}\left(Y_{i,2024} - Y_{i,2023} \mid W_i = 1\right) = \gamma_{ii,2024} + \frac{1}{2}\sum\limits_{j\neq i}\gamma_{ij,2024}$

- $\mathbb{E}\left(Y_{i,2024} - Y_{i,2023} \mid W_i = 0\right) = \frac{1}{2}\sum\limits_{j\neq i}\gamma_{ij,2024}$

А тогда математическое ожидание DiD-оценщика из логики предыдущего пункта все еще равно $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_{ii,2024} \neq \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{ij,2024}$, то есть он оказывается смещен.

Интерпретация оценки здесь такова: $\tau_{\text{новое}}$ – это средняя экономия времени в пути, какой бы она была, если бы изначально у типичного жителя Москвы не было доступной станции метро поблизости, а затем она появилась бы в 15 минутах от дома *у каждого москвича*. Иными словами, если бы у каждого Москвы в 15 минутах ходьбы от дома появилась новая станция метро, то *с учетом косвенных эффектов* его среднее время на дорогу сократилось бы на $\tau_{\text{новое}}$ минут в неделю (2 балла).

3

Вновь заметим, что разность потенциальных исходов имеет вид

$$Y_{i,2024} - Y_{i,2023} = \gamma_{ii,2024}W_i + \sum_{j\neq i}\gamma_{ij,2024}W_j + \varepsilon_{i,2024} - \varepsilon_{i,2023}$$

Теперь рассмотрим «хитрую» оценку и преобразуем ее в соответствии с уравнением выше:

$$\hat{\tau}_{\text{хитрое}} = \frac{\kappa}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{i,2024} - Y_{i,2023}\right) = \frac{\kappa}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ii,2024}W_i + \frac{\kappa}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\gamma_{ij,2024}W_j + \frac{\kappa}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_{i,2024} - \varepsilon_{i,2023}\right)$$

Тогда, поскольку $\mathbb{E}\,W_i = \frac{1}{2}$ и $\mathbb{E}\,\varepsilon_{it} = 0$, имеем

$$\mathbb{E}\,\hat{\tau}_{\text{хитрое}} = \frac{\kappa}{2n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ii,2024} + \frac{\kappa}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\gamma_{ij,2024} = \frac{\kappa}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij,2024}$$

Получается, при $\kappa = 2$ оценка $\hat{\tau}_{\text{хитрое}}$ будет несмещенной (7 баллов).

Также можно заметить, что при в общей ситуации, когда $\mathbb{P}(W_i = 1) = \pi$, искомое $\kappa = \frac{1}{\pi}$, что показывается полностью аналогичным способом. Это замечание для получения полного балла, разумеется, не требовалось.

Задача 2. (25 баллов)

①

(7 баллов) МНК-оценку $\hat\beta$ можно вычислить по известной формуле для оценки коэффициента в парной регрессии:

$$\hat\beta = \frac{\operatorname{cov}(\lg p, W)}{\operatorname{var} W} = \frac{\overline{\lg p \cdot W} - \overline{\lg p} \cdot \overline{W}}{\overline{W^2} - \overline{W}^2}$$

$$\overline{\lg p} = \frac{(300+100)\cdot(-2) + (970+390)\cdot(-1) + (5\,260+6\,210)\cdot 0 + (1\,570+1\,400)\cdot 1}{16\,200} = \frac{810}{16\,200}$$

$$\overline{\lg p \cdot W} = \frac{100\cdot(-2) + 390\cdot(-1) + 6\,210\cdot 0 + 1\,400\cdot 1}{16\,200} = \frac{810}{16\,200} = 0.05$$

$$\overline{W} = \overline{W^2} = 0.5 \quad \text{и} \quad \overline{W}^2 = 0.25$$

$$\Longrightarrow \hat\beta = \frac{0.05 - 0.05\cdot 0.5}{0.5 - 0.25} = 0.1$$

Альтернативно, поскольку переменная W бинарная, как известно, коэффициент $\hat\beta$ в таком случае равен разности средних значений целевой переменной p на подвыборке, где $W = 1$, и на подвыборке, где $W = 0$:

$$W = 1 \quad : \quad \overline{\lg p_1} = \frac{100\cdot(-2) + 390\cdot(-1) + 6\,210\cdot 0 + 1\,400\cdot 1}{8\,100} = \frac{810}{8\,100} = 0.1$$

$$W = 0 \quad : \quad \overline{\lg p_0} = \frac{300\cdot(-2) + 970\cdot(-1) + 5\,260\cdot 0 + 1\,570\cdot 1}{8\,100} = \frac{0}{8\,100} = 0$$

$$\Longrightarrow \hat\beta = \overline{\lg p_1} - \overline{\lg p_0} = 0.1$$

Такой вариант решения требовал дополнительных словесных пояснений. Если в верном решении допускалась арифметическая ошибка, то (5 баллов).

②

(3 балла) Перед интерпретацией коэффициента было бы правильно убедиться в его значимости, указание на что требовалось от участников универсиады. При этом формальная проверка значимости не предполагалась, хотя она и не слишком трудоемка (продемонстрирована далее после интерпретации).

Интерпретация при этом такова: при прочих равных условиях программа благоустройства увеличивает удовлетворенность жизнью типичного жителя района, где она была проведена, на $\left(10^{\hat\beta} - 1\right) \cdot 100\% = (10^{0.1} - 1) \cdot 100\% \approx 25.89\%$.

Формально убедиться в значимости $\hat{\beta}$ можно было так (вновь для получения полного балла это не требовалось): нетрудно видеть, что $\hat{\alpha} = \overline{\lg p_0} = 0$, поэтому прогноз модели будет равен 0.1 в группе, где благоустройство было, и 0 – где не было. Тогда можно вычислить ESS (*error sum of squares*) модели:

$$\mathrm{ESS}_1 = 100 \cdot (-2-0.1)^2 + 390 \cdot (-1-0.1)^2 + 6\,210 \cdot (0-0.1)^2 + 1\,400 \cdot (1-0.1)^2 = 2\,190$$

$$\mathrm{ESS}_0 = 300 \cdot (-2-0)^2 + 970 \cdot (-1-0)^2 + 5\,260 \cdot (0-0)^2 + 1\,570 \cdot (1-0)^2 = 3\,821$$

$$\Longrightarrow \ \mathrm{ESS} = \mathrm{ESS}_0 + \mathrm{ESS}_1 = 2\,190 + 3\,821 = 6\,011$$

Тогда по известной формуле можно вычислить стандартную ошибку интересующего нас коэффициента:

$$\hat{\mathrm{se}}\,\hat{\beta} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{\mathrm{ESS}}{n \operatorname{var} W}} = \sqrt{\frac{1}{16\,198} \cdot \frac{6\,011}{16\,200 \cdot 0.25}} \approx 0.0096$$

Стандартная ошибка достаточно мала, так что $t_{\text{расч.}}$ в тесте на значимость β будет больше 10, поэтому на любом разумном уровне значимости можно сделать вывод о том, что коэффициент значим и его интерпретация не лишена смысла.

3

(7 баллов) При расчете эффекта на уровне округов аналогично пункту 1 можно оценить коэффициент β по формуле для коэффициента в парной регрессии или использовать разность средних. Приведем вычисления вторым способом. Используя десятичные логарифмы элементов столбцов А и Б, имеем

$$\begin{aligned} W = 1 \quad &: \quad \overline{\lg p_1} = \tfrac{1+1+1+1+1+2+2+4+4}{9} = \tfrac{17}{9} \\ W = 0 \quad &: \quad \overline{\lg p_0} = \tfrac{1+1+1+1+1+1+3+4+4}{17} = \tfrac{17}{9} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\beta} = \overline{\lg p_1} - \overline{\lg p_0} = 0$$

4

(3 балла) В новых обстоятельствах проверка значимости становится бессмысленной и коэффициент, полученный выше, имеет такую интерпретацию: при прочих равных условиях программа благоустройства никак не меняет суммарную удовлетворенность жизнью жителей типичного района, где она была проведена.

(5)

В итоговом тексте задания универсиады данный пункт был сформулирован недостаточно точно, поэтому создавалось ощущение, что модель из этого вопроса идентична модели из пункта (1). По этой причине здесь при решении баллами оценивались любые разумные замечания, относящиеся к вопросу. Пункты 5 и 6 оценивались суммарно в (5 баллов)

При этом в оригинальной формулировке задачи подразумевалось, что исследователь предпочтет использовать модель так называемой пуассоновской регрессии, в которой $\mathbb{E}\,(p \mid W) = 10^{\alpha+\beta W} = e^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}W}$ и $p \mid W \sim \mathrm{Poi}(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}W)$. В такой ситуации

$$\begin{aligned} \lg \mathbb{E}(p \mid W = 1) &= \alpha + \beta \\ \lg \mathbb{E}(p \mid W = 0) &= \alpha \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathbb{E}(p \mid W = 1)}{\mathbb{E}(p \mid W = 0)} = 10^{\beta}$$

Заменяя в выражении выше условные матожидания на условные средние[1], получаем искомую оценку

$$\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} = \frac{(10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 100 + 100 + 10\,000 + 10\,000)/8\,100}{(10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1\,000 + 10\,000 + 10\,000)/8\,100} = \frac{20\,250}{21\,060} \approx 0.9615$$

$$\Longrightarrow \; 10^{\hat{\beta}} - 1 = -0.0385$$

Интересно, что этот ответ не зависит от того, используются ли индивидуальные наблюдения или их суммы на уровне округов: поскольку выборка разделена пополам, знаменатели средних в числителе и в знаменателе одинаковые, и поэтому итоговая оценка в любом случае равна отношению суммарных баллов удовлетворенности в районах, где было благоустройство, к суммарным баллам там, где его не было.

(6)

В этом пункте вновь из-за несовершенства формулировки задачи баллами оценивались любые уместные замечания.

При этом среди преимуществ пуассоновской регрессии из пункта (5) над лог-линейной моделью из вопроса (1) можно было бы выделить то, что пуассоновская модель явным образом учитывает целочисленность зависимой переменной и может обрабатывать нулевые значения, а также что оценка и интерпретация коэффициента β и непосредственно эффекта $10^{\beta} - 1$ не зависят от гранулярности выборки и могут быть определены как по индивидуальным, так и по агрегированным по округам данным.

[1] Эта замена дает верный результат, эквивалентный обучению пуассоновской регрессии для случая бинарной независимой переменной, что можно показать, непосредственным образом максимизируя соответствующее правдоподобие. Фактически это полный аналог вычисления МНК-оценки как разности средних в подгруппах $W = 1$ и $W = 0$.

Задача 3. (25 баллов)

---

①

Чтобы с помощью модели (2) проверить, влияет ли открытость экономики на темпы роста ВВП, можно рассмотреть t-тест на значимость коэффициента β_5 при переменной $\text{OPEN}_{i,t-1}$:

$$\begin{array}{lcl} H_0 & : & \beta_5 = 0 \\ H_1 & : & \beta_5 \neq 0 \end{array} \qquad \text{(1 балл)}$$

Из приведенной таблицы 1 имеем $\hat{\beta}_5 = 0.215$, а из оцененной ковариационной матрицы оценок (таблица 2) видим $\hat{\mathbb{V}}\,\hat{\beta}_5 = 0.01$, поэтому

$$t_{\text{расч.}} = \frac{\hat{\beta}_5}{\hat{\text{se}}\,\hat{\beta}_5} = \frac{0.215}{\sqrt{0.01}} = 2.15 > t^{5\%}_{\text{крит.}} \approx 1.96 \qquad \text{(3 балла)}$$

Получается, на уровне значимости 5% гипотезу H_0 о равенстве нулю соответствующего коэффициента можно отвергнуть. Иными словами, в соответствии с моделью (2), открытость экономики в самом деле значимо влияет на темпы роста ВВП (1 балл).

②

В условиях отсутствия санкций имеем $d_{i,t-1} = 0$, поэтому оцененную модель можно переписать в виде

$$\hat{y}_{it} = 0.15 + 1.16\,\text{FIN}_{i,t-1} - 0.82\,\text{FIN}^2_{i,t-1} + 0.215\,\text{OPEN}_{i,t-1} + 0.43\,\text{GCF}_{i,t-1}$$

Уравнение выше описывает квадратичную зависимости $\hat{y}_{it}$ от $\text{FIN}_{i,t-1}$, поэтому искомый оптимум будет находиться в вершине соответствующей параболы (1 балл):

$$\text{FIN}_{\text{опт.}} = -\frac{\hat{\beta}_1}{2\hat{\beta}_2} = \frac{1.16}{2 \cdot 0.82} \approx 0.7073 \qquad \text{(3 балла)}$$

Также важно отметить, что $\hat{\beta}_2 = -0.82 < 0$, поэтому ветви рассматриваемой параболы направлены вниз и найден в самом деле максимум, а не минимум (1 балл).

3

Предложенную в задании гипотезу можно формализовать по-разному. Например, можно найти вершину соответствующей параболы в условиях отсутствия санкций ($d_{i,t-1} = 0$) и их наличия ($d_{i,t-1} = 1$) и проверить их совпадение:

$$\mathrm{FIN}^{d=0}_{\text{опт.}} = -\frac{\beta_1}{2\beta_2} \overset{?}{=} -\frac{\beta_1+\beta_3}{2\left(\beta_2+\beta_4\right)} = \mathrm{FIN}^{d=1}_{\text{опт.}}$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} \overset{?}{=} \frac{\beta_1+\beta_3}{\beta_2+\beta_4} \iff \cancel{\beta_1\beta_2} + \beta_1\beta_4 \overset{?}{=} \cancel{\beta_1\beta_2} + \beta_2\beta_3 \iff \beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3 \overset{?}{=} 0$$

Однако тогда перед нами встанет гипотеза о нелинейном ограничении, проверка которой сопряжена с некоторыми техническими трудностями. Вместо это разумно проверить гипотезу о том, что введение санкций вообще не сказалось на коэффициентах при $\mathrm{FIN}_{i.t-1}$ и $\mathrm{FIN}^2_{i,t-1}$ (фактически – тест «короткая модель против длинной»):

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_3 = \beta_4 = 0 \\ H_1 &: \beta_3 \neq 0 \ \text{ или } \ \beta_4 \neq 0 \end{aligned} \qquad \text{(1 балл)}$$

Как известно, такую гипотезу можно проверить F-тестом, расчетная статистика в котором в терминах R^2-коэффициентов модели имеет вид

$$F_{\text{расч.}} = \frac{\left(R^2_{\text{long}} - R^2_{\text{short}}\right)/q}{\left(1-R^2_{\text{long}}\right)/(n-k)} = \frac{(0.4-0.2)/2}{(1-0.4)/(1807-7)} = 300 > F^{5\%}_{\text{крит.}}(2,1800) \approx 3 \quad \text{(3 балла)}$$

Получается, на уровне значимости 5% гипотезу H_0 о равенстве нулю соответствующих коэффициентов можно отвергнуть. Иными словами, введение санкций меняет коэффициенты уравнения и сдвигают оптимальную точку (1 балл).

4

Как уже отмечалось выше, при введении санкций $d_{i,t-1} = 1$ уравнение модели (2) предполагает оптимальный уровень развития финансового сектора на уровне $\mathrm{FIN}^{d=1}_{\text{опт.}} = -\frac{\beta_1+\beta_3}{2(\beta_2+\beta_4)} \overset{?}{=} \frac{1}{2}$. Тогда можно преобразовать

$$-\frac{\beta_1+\beta_3}{2\left(\beta_2+\beta_4\right)} \overset{?}{=} \frac{1}{2} \iff -\left(\beta_1+\beta_3\right) \overset{?}{=} \beta_2+\beta_4 \iff \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4 \overset{?}{=} 0$$

Получается, перед нами стоит задача провести тест на линейной ограничение:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4 = 0 \\ H_1 &: \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4 \neq 0 \end{aligned} \qquad \text{(1 балл)}$$

Как известно, такую гипотезу можно проверить t-тестом с расчетной статистикой $t_{\text{расч.}} = \frac{\hat\beta_1+\hat\beta_2+\hat\beta_3+\hat\beta_4}{\widehat{\text{se}}\left(\hat\beta_1+\hat\beta_2+\hat\beta_3+\hat\beta_4\right)}$. Поскольку дисперсия суммы равна сумме дисперсий и всевозможных попарных ковариаций, то в знаменателе фактически стоит квадратный корень из суммы всех чисел следующего фрагмента оцененной ковариационной матрицы коэффициентов:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \hat\beta_1 & \hat\beta_2 & \hat\beta_3 & \hat\beta_4 & \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\hat\beta_1 & \cdots & 0.25 & 0.33 & 0.14655 & 0.72 & \cdots \\
\hat\beta_2 & \cdots & 0.33 & 0.16 & 0.23 & 0.9 & \cdots \\
\hat\beta_3 & \cdots & 0.14655 & 0.23 & 0.04 & 0.32 & \cdots \\
\hat\beta_4 & \cdots & 0.72 & 0.9 & 0.32 & 0.0169 & \cdots \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Как нетрудно убедиться, эта сумма равна 5.76, поэтому тестовая статистика принимает вид

$$t_{\text{расч.}} = \frac{1.16 - 0.82 + 0.715 - 0.6}{\sqrt{5.76}} = \frac{0.455}{2.4} \approx 0.1896 < t^{10\%}_{\text{крит.}} \approx 1.65 \qquad \text{(3 балла)}$$

Получается, ни на каком разумном уровне значимости модель (2) не позволяет отвергнуть гипотезу о равенстве нулю суммы выбранных коэффициентов. Иными словами, у нас нет оснований полагать, что оптимальный уровень развития финансового сектора отличается от 0.5 (1 балл).

5

Мотивировать включение в правую часть уравнения модели именно лагов независимых переменных можно по-разному. Так, например, годились бы объяснения, сводящие к тому, что

1. при включении значений переменных из правой части, измеренных в тот же момент времени, в модели может возникать эндогенность из-за влияния дополнительных неучтенных факторов или так называемой проблемы двусторонней причинно-следственной связи;

2. исследователь Василий может предполагать, что переменные из правой части уравнения не оказывают мгновенного влияния на темпы роста, поэтому с помощью включения лагов он моделирует именно отложенный эффект.

Здесь любые подходящие по экономическим и/или эконометрическим соображениям и убедительно мотивированные рассуждения оценивались в 5 баллов.

Задача 4. (25 баллов)

1

(3 балла) Известно, что МНК-оценка коэффициента β_1 из уравнения парной регрессии $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1$ имеет вид (далее используется свойство билинейности ковариации)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\operatorname{cov}(x_1, y)}{\operatorname{var} x_1} = \frac{\operatorname{cov}(x_1,\ \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon)}{\operatorname{var} x_1} = \frac{\overbrace{\operatorname{cov}(x_1, \beta_0)}^{=0}}{\operatorname{var} x_1} + \frac{\beta_1 \overbrace{\operatorname{cov}(x_1, x_1)}^{=\operatorname{var} x_1}}{\operatorname{var} x_1} + \\ + \frac{\beta_2 \operatorname{cov}(x_1, x_2)}{\operatorname{var} x_1} + \frac{\operatorname{cov}(x_1, \varepsilon)}{\operatorname{var} x_1} = \beta_1 + \frac{\beta_2 \operatorname{cov}(x_1, x_2)}{\operatorname{var} x_1} + \frac{\operatorname{cov}(x_1, \varepsilon)}{\operatorname{var} x_1}$$

В таком случае смещение в оценке $\hat{\beta}_1$ при оценке парной модели, вызванное пропуском существенной переменной x_2, равно (используется линейность матожидания)

$$\mathbb{E}\,\hat{\beta}_1 - \beta_1 = \mathbb{E}\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 \operatorname{cov}(x_1, x_2)}{\operatorname{var} x_1} + \frac{\operatorname{cov}(x_1, \varepsilon)}{\operatorname{var} x_1}\right) - \beta_1 = \frac{\beta_2 \operatorname{cov}(x_1, x_2)}{\operatorname{var} x_1} + \underbrace{\mathbb{E}\left(\frac{\operatorname{cov}(x_1, \varepsilon)}{\operatorname{var} x_1}\right)}_{=0}$$

2

(3 балла) В качестве иллюстрации того, что смещение в такой ситуации может быть равно нулю, ожидалось увидеть разумный пример, в котором x_1 и x_2 были независимы (или хотя бы некоррелированы).

3

(3 балла) Пусть N_1 – количество наблюдений, для которых $x_1 = 1$, а N_2 – для которых $x_2 = 1$. Тогда $\overline{x_1} = \frac{N_1}{N}$ и $\overline{x_2} = \frac{N_2}{N}$. Из условия о том, что x_1 и x_2 одновременно не могут принимать значение 1, следует, что их произведение всегда равно нулю. Теперь с учетом этого рассмотрим

$$\operatorname{bias} \hat{\beta}_1 = \frac{\beta_2 \operatorname{cov}(x_1, x_2)}{\operatorname{var} x_1} = \beta_2 \cdot \frac{\overline{x_1 x_2} - \overline{x_1}\,\overline{x_2}}{\overline{x_1^2} - \overline{x_1}^2} = \beta_2 \cdot \frac{0 - \frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_2}{N}}{\frac{N_1}{N} - \frac{N_1^2}{N^2}} = -\beta_2 \cdot \frac{N_2}{N - N_1}$$

То же самое можно было бы получить, используя классическое определение ковариации или действуя матричным способом, представив ковариацию как скалярное произведение векторов x_1 и x_2 за вычетом их средних.

④

(3 балла) Здесь ожидалось, что будет приведен пример ситуации, в которой в эконометрическую модель включались бы две бинарные переменные, которые никогда не принимали бы значение 1 одновременно. Простейший пример такой ситуации получается при создании дамми-переменных для категориального признака (то есть введения в модель индикаторов для значений категориальной переменной).

⑤

(3 балла) В этом пункте можно в векторно-матричной форме повторить рассуждения из вопроса 1. В предположении отсутствия чистой мультиколлинеарности вектор МНК-оценок $\hat{\beta}_1$ для модели $\hat{y} = X_1\hat{\beta}_1$ имеет вид

$$\hat{\beta}_1 = \left(X_1^\top X_1\right)^{-1} X_1^\top y = \left(X_1^\top X_1\right)^{-1} X_1^\top \left(X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon\right) = \underbrace{\left(X_1^\top X_1\right)^{-1} X_1^\top X_1}_{=I_n} \beta_1 +$$

$$+ \left(X_1^\top X_1\right)^{-1} X_1^\top X_2\beta_2 + \left(X_1^\top X_1\right)^{-1} X_1^\top \varepsilon = \beta_1 + \left(X_1^\top X_1\right)^{-1} \left(X_1^\top X_2\right) \beta_2 + \left(X_1^\top X_1\right)^{-1} X_1^\top \varepsilon$$

Соответственно, смещение в этом случае равно

$$\mathbb{E}\,\hat{\beta}_1 - \beta_1 = \mathbb{E}\left[\beta_1 + \left(X_1^\top X_1\right)^{-1} \left(X_1^\top X_2\right) \beta_2 + \left(X_1^\top X_1\right)^{-1} X_1^\top \varepsilon\right] - \beta_1 = \left(X_1^\top X_1\right)^{-1} \left(X_1^\top X_2\right) \beta_2 +$$

$$+ \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(X_1^\top X_1\right)^{-1} X_1^\top \varepsilon\right]}_{=0}$$

⑥

Утверждение 1 (3 балла), в сущности, очевидно. В явном виде соответствующее матричное произведение имеет вид (далее $x_{ij}^{(1)}$ – i-ое наблюдение j-ой переменной из первой группы X_1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11}^{(1)} & x_{21}^{(1)} & \cdots & x_{N1}^{(1)} \\ x_{12}^{(1)} & x_{22}^{(1)} & \cdots & x_{N2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1k_1}^{(1)} & x_{2k_1}^{(1)} & \cdots & x_{Nk_1}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} & \cdots & x_{1k_1}^{(1)} \\ 1 & x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} & \cdots & x_{2k_1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1}^{(1)} & x_{N2}^{(1)} & \cdots & x_{Nk_1}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum 1\cdot 1 & \sum 1\cdot x_{i1}^{(1)} & \sum 1\cdot x_{i2}^{(1)} & \cdots & \sum 1\cdot x_{ik_1}^{(1)} \\ \sum 1\cdot x_{i1}^{(1)} & \sum x_{i1}^{(1)} x_{i1}^{(1)} & \sum x_{i1}^{(1)} x_{i2}^{(1)} & \cdots & \sum x_{i1}^{(1)} x_{ik_1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum 1\cdot x_{ik_1}^{(1)} & \sum x_{ik_1}^{(1)} x_{i1}^{(1)} & \sum x_{ik_1}^{(1)} x_{i2}^{(1)} & \cdots & \sum x_{ik_1}^{(1)} x_{ik_1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Поскольку первый столбец матрицы X_1 – столбец из единиц, а все остальные столбцы попарно ортогональны (в данных нет двух разных бинарных переменных, которые бы одновременно принимали значение 1), то полученное произведение имеет в точности описанную структуру.

1. элементы первой строки матрицы $X_1^\top X_1$ равны суммам соответствующих столбцов матрицы X_1, то есть $\sum\limits_{i=1}^{N} 1 \cdot x_{ij}^{(1)} = \sum\limits_{i=1}^{N} x_{ij}^{(1)} = N_j$;

2. элементы на главной диагонали матрицы $X_1^\top X_1$ тоже равны суммам соответствующих столбцов матрицы X_1, то есть $\sum\limits_{i=1}^{N} x_{ij}^{(1)} x_{ij}^{(1)} = \sum\limits_{i=1}^{N} x_{ij}^{(1)} = N_j$, так как x_j^1 совпадает с собственным квадратом;

3. элементы $X_1^\top X_1$, стоящие вне главной диагонали и первой строки/столбца, равны нулю из-за ортогональности переменных: $\sum\limits_{i=1}^{N} x_{ij}^{(1)} x_{il}^{(1)} = 0$ при $j \neq l$, так как $x_{ij}^{(1)}$ и $x_{il}^{(1)}$ не могут одновременно быть единицами и поэтому в произведении всегда дают нуль;

4. остальные элементы матрицы $X_1^\top X_1$ восстанавливаются из соображений симметрии.

Утверждение 2 (3 балла) получается из предыдущего результата и леммы об обращении «стреловидной» (от англ. *arrowhead*) матрицы. Выделим в $X_1^\top X_1$ блочную структуру:

$$X_1^\top X_1 = \left(\begin{array}{c:cccc} N & N_1 & N_2 & \cdots & N_{k_1} \\ \hdashline N_1 & N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ N_2 & 0 & N_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{k_1} & 0 & 0 & \cdots & N_{k_1} \end{array}\right) \implies \begin{cases} \alpha = N \\ z^\top = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_{k_1} \end{pmatrix} \\ D = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_{k_1} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Очевидно, что D^{-1} также будет диагональной матрицей, в которой на пересечении i-ой строки и i-го столбца будет стоять $\frac{1}{N_i}$. Теперь определим

$$D^{-1}z = \begin{pmatrix} 1/N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/N_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/N_{k_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_{k_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{1}}$$

$$\implies \alpha - z^\top D^{-1} z = N - z^\top \vec{\mathbf{1}} = N - (N_1 + N_2 + \ldots + N_{k_1}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \lambda$$

Наконец, найдем

$$u^\top = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow uu^\top = \left(\begin{array}{c:cccc} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \hdashline -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Получается, об лемме об обращении «стрелочной» матрицы имеем

$$\left(X_1^\top X_1\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c:cccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & \frac{1}{N_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{N_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N_{k_1}} \end{array}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\begin{array}{c:cccc} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \hdashline -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\begin{array}{c:cccc} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \hdashline -1 & 1+\frac{\lambda}{N_1} & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1+\frac{\lambda}{N_2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1+\frac{\lambda}{N_{k_1}} \end{array}\right)$$

Также засчитывалось очевидное доказательство без использования Леммы, если участник просто перемножал матрицы и подучал в произведении единичную матрицу.

Утверждение 3 (2 балла) получается аналогично *утверждению 1*. В самом деле, выпишем произведение $X_1^\top X_2$ явно (здесь $x_{ij}^{(2)}$ – i-ое наблюдение j-ой переменной из второй группы X_2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11}^{(1)} & x_{21}^{(1)} & \cdots & x_{N1}^{(1)} \\ x_{12}^{(1)} & x_{22}^{(1)} & \cdots & x_{N2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1k_1}^{(1)} & x_{2k_1}^{(1)} & \cdots & x_{Nk_1}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}^{(2)} & x_{12}^{(2)} & \cdots & x_{1k_2}^{(2)} \\ x_{21}^{(2)} & x_{22}^{(2)} & \cdots & x_{2k_2}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1}^{(2)} & x_{N2}^{(2)} & \cdots & x_{Nk_2}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum 1 \cdot x_{i1}^{(2)} & \sum 1 \cdot x_{i2}^{(2)} & \cdots & \sum 1 \cdot x_{ik_2}^{(2)} \\ \sum x_{i1}^{(1)} x_{i1}^{(2)} & \sum x_{i1}^{(1)} x_{i2}^{(2)} & \cdots & \sum x_{i1}^{(1)} x_{ik_2}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_{ik_1}^{(1)} x_{i1}^{(2)} & \sum x_{ik_1}^{(1)} x_{i2}^{(2)} & \cdots & \sum x_{ik_1}^{(1)} x_{ik_2}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Так как никакие $x_{ij}^{(1)}$ и $x_{il}^{(2)}$ не равны 1 одновременно, все их произведения также равны нулю, поэтому в матрице $X_1^\top X_2$ все строки, кроме первой, действительно заполнены нулями. Что же касается первой строки, в ней стоят в точности суммы столбцов матрицы X_2, то есть величины $\sum\limits_{i=1}^{N} x_{ij}^{(2)} = M_j$.

Утверждение 4 (2 балла) Наконец, можно получить явный вид смещения, которое в общей ситуации выражается формулой из пункта 5. Для этого непосредственно перемножим соответствующие матрицы:

$$\operatorname{bias}\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\lambda}\left(\begin{array}{c:cccc} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \hdashline -1 & 1+\frac{\lambda}{N_1} & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1+\frac{\lambda}{N_2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1+\frac{\lambda}{N_{k_1}} \end{array}\right)\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & \cdots & M_{k_2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\beta_2 =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & \cdots & M_{k_2} \\ -M_1 & -M_2 & -M_3 & \cdots & -M_{k_2} \\ -M_1 & -M_2 & -M_3 & \cdots & -M_{k_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -M_1 & -M_2 & -M_3 & \cdots & -M_{k_2} \end{pmatrix}\beta_2$$

Иными словами, смещение j-ого коэффициента в уравнении $\hat{y} = X_1\hat{\beta}_1$, возникшее из-за пропуска блока переменных X_2, в данном случае в самом деле равно

$$\operatorname{bias}\hat{\beta}_1^j = -\frac{M_1}{\lambda}\beta_2^1 - \frac{M_2}{\lambda}\beta_2^2 - \ldots - \frac{M_{k_2}}{\lambda}\beta_2^{k_2}$$

Дополнительно можно отметить, что эта задача вдохновлена работой [Clarke, 2019], в которой этот результат не только скрупулезно обоснован, но и развит до оценки смещения для моделей по типу разности разностей. Авторы универсиады приглашают заинтересовавшихся ознакомиться с оригинальным результатом Д. Кларка.